Obligatoire : rédiger l'exercice MPSI et au moins un autre exercice au choix.

Exercice MPSI :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs.

1. On suppose qu'à partir d'un certain rang

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$.

2. On suppose que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + o(\frac{1}{n}) \text{ avec } \alpha > 1$$

Montrer, à l'aide d'une comparaison avec une série de Riemann, que la série $\sum u_n$ converge.

3. On suppose cette fois-ci que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + o(\frac{1}{n}) \text{ avec } \alpha < 1$$

Montrer que la série $\sum u_n$ diverge

Exercice 1 :

On note $\star$ la loi interne dans $G = \mathbb{C}\times\mathbb{R}$ définie, pour tous $(z,t),(z',t') \in G$ par :

$$(z,t)\star(z',t') =' z + z', t + t' + Im(\overline{z}z')).$$

Montrer que $(G,\star)$ est un groupe. Est-il commutatif ?

Exercice 2 :

Soient $(G,\cdot)$ un groupe, e son neutre, $a, b \in G$ tels que $ba = ab^2$ et $ab = ba^2$. Montrer que $a = b = e$

Exercice 3 :

Montrer que les groupes $(\mathbb{Z},+)$ et $(\mathbb{Z}^2,+)$ ne sont pas isomorphes.

CORRECTIONS :
Exercice MPSI :

1. Par récurrence, on montre que pour tout $n \geqslant N$, $0 < u_n \leqslant \dfrac{u_N}{v_N} v_n = C \cdot v_n$ donc $u_n = \mathrm{O}(v_n)$.

2. Soit $\beta \in \mathbb{R}$ et $v_n = \dfrac{1}{n^\beta}$. Alors
$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{(1+1/n)^\beta} \underset{DL_0(1+x)^{-\beta}}{=} 1 - \frac{\beta}{n} + o(1/n).$$
Donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = (1 - \dfrac{\alpha}{n}) - (1 - \dfrac{\beta}{n}) + o(1/n) = \dfrac{\beta - \alpha}{n} + o(1/n)$ qui est du signe de $\beta - \alpha$ lorsque n tend vers $+\infty$.
Soit alors $1 < \beta < \alpha$.
À partir d'un certain rang, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ donc $u_n = \mathrm{O}(v_n)$. Or $\sum v_n$ est une série (absolument) convergente donc par théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum u_n$ l'est aussi.

3. Cette fois, on pose $\beta = 1$. Alors, pour n assez grand, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ donc $v_n = O(u_n)$. Comme la série harmonique $\sum v_n = \sum 1/n$ est divergente, par comparaison des séries à termes positifs, $\sum u_n$ est également divergente.
Ce résultat porte le nom de *Règle de Raabe-Duhamel*.

Exercice 1 :
Vérifier l'associativité de la loi $\star$ par le calcul, vérifier que $\star$ est une loi interne et que $(0,0)$ est le neutre.
Ensuite, pour (z,t) donné, on cherche (z',t') symétrique tel que $(z,t) \star (z',t') = (0,0)$.
En écrivant un système on finit par trouver $z' = -z$ et $t' = -t$.
Donc G est un groupe.
Exercice 2 :
On a $ab = ab^2 = (ab)b = (ba^2)b = (ba)(ab)$. Comme ba est inversible dans G, en multipliant les deux membres par $(ab)^{-1}$ à gauche, on obtient $e = ab$. Donc $b = a^{-1}$ et $ba = e$. Ensuite, $e = ab = ba^2 = (ba)a = ea = a$ et donc $a = e$ et finalement $b = e$.
Exercice 3 :
Par l'absurde, si f est un tel isomorphisme, soit $(a,b) = f(1)$.
Comme f est unisomorphisme, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $f(n) = (1,0)$. Alors $(1,0) = f(n) = nf(1) = n(a,b) = (na,nb)$ Donc $na = 1$ et $nb = 0$. Donc $n \neq 0$ et finalement $b = 0$.
En procédant de même à partir de $(0,1)$, on obtiendrait que $a = 0$.
Alors $f(1) = (0,0) = f(0)$ car f est un morphisme de groupes, ce qui contredit l'injectivité de f.