

Obligatoire : rédiger l'exercice MPSI et au moins un autre exercice au choix.

**Exercice MPSI :**

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites de réels strictement positifs.

1. On suppose qu'à partir d'un certain rang

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

Montrer que  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$ .

2. On suppose que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right) \text{ avec } \alpha > 1$$

Montrer, à l'aide d'une comparaison avec une série de Riemann, que la série  $\sum u_n$  converge.

3. On suppose cette fois-ci que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right) \text{ avec } \alpha < 1$$

Montrer que la série  $\sum u_n$  diverge

**Exercice 1 :**

On note  $\star$  la loi interne dans  $G = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$  définie, pour tous  $(z, t), (z', t') \in G$  par :

$$(z, t) \star (z', t') = (z + z', t + t' + \operatorname{Im}(\bar{z}z')).$$

Montrer que  $(G, \star)$  est un groupe. Est-il commutatif?

**Exercice 2 :**

Soient  $(G, \cdot)$  un groupe,  $e$  son neutre,  $a, b \in G$  tels que  $ba = ab^2$  et  $ab = ba^2$ . Montrer que  $a = b = e$

**Exercice 3 :**

Montrer que les groupes  $(\mathbb{Z}, +)$  et  $(\mathbb{Z}^2, +)$  ne sont pas isomorphes.