Exercice en temps libre - Semaine 9

Exercice

1) Quelle est la période de la fonction tan ?

2) Représenter la fonction tan sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

3) Démontrer l'existence d'une suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que ;

— $T_0(X) = X$

— pour tout naturel n, $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan^{(n)}(x) = T_n(\tan(x))$ où $\tan^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de la fonction tan.

On explicitera une relation de récurrence vérifiée entre T_n et T_{n+1}.

4) Expliciter les polynômes T_1, T_2, T_3.

5) Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que les coefficients du polynôme T_n sont des entiers naturels. Quel est le degré du polynôme T_n ?

6) Justifier qu'il existe une unique suite de nombres entiers naturels $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\ , \tan(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{t_j}{(2j+1)!} x^{2j+1} + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} T_{2n+2}(\tan(t)) \ dt$$

On citera précisément le théorème utilisé.

Dans la suite on notera I un intervalle ouvert symétrique par rapport à 0 et f de classe C^∞ de I dans $\mathbb{R}$.
On note $\forall x \in I$, $R_n(x) = \dfrac{1}{(n-1)!} \displaystyle\int_0^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1} \ dt$
On suppose aussi que f est impaire et que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in I$, $f^{(n)}(x) \geqslant 0$
7) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in I$, $R_n(x) = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + R_{n+1}(x)$
8) Soit $b \in I$ tel que $b > 0$.

a) Montrer que la suite $(R_n(b))_{n\geqslant 1}$ est convergente.

b) Soient $x \in [0, b]$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

i) Justifier $R_n(x) = \dfrac{x^n}{(n-1)!} \displaystyle\int_0^1 f^{(n)}(tx)(1-t)^{n-1} \ dt$
ii) En déduire que $0 \leqslant R_n(x) \leqslant \dfrac{x^n}{(n-1)!} \displaystyle\int_0^1 f^{(n)}(tb)(1-t)^{n-1} \ dt$
iii) Démontrer que $R_n(x) \leqslant \left(\dfrac{x}{b}\right)^n R_n(b)$
c) En déduire que $\forall x \in]-b, b[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$
9) Démontrer $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t_n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$
10) Pour les 5/2 : que peut-on dire du rayon de convergence de cette série entière ?

1) La fonction tan a pour période π puisque son ensemble de définition est invariant par $x \mapsto x + \pi$ et que $\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x)$.
2) La fonction tan est strictement croissante et impaire sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et elle a pour limite $+\infty$ en $\frac{\pi}{2}$. La stricte croissance de tan sur $]-\pi/2, \pi/2[$ montre que π est la plus petite période positive de tan.
3) Démontrons par récurrence sur n l'existence de la suite (T_n).
$\tan^{(0)}(x) = \tan x = T_0(\tan x)$ en posant $T_0(X) = X$.
Supposons pour un entier n l'existence d'un polynôme T_n vérifiant $\tan^{(n)}(x) = T_n(\tan x)$.
En dérivant la fonction composée on obtient : $\tan^{(n+1)}(x) = T_n'(\tan x)(1 + \tan^2(x))$.
En posant $T_{n+1} = (1 + X^2)T_n'$ on obtient $\tan^{(n+1)}(x) = T_{n+1}(\tan x)$ où T_{n+1} est un polynôme.
La propriété est bien démontrée par récurrence.
4) $T_1 = 1 + X^2$, $T_2 = (1 + X^2) \times 2X = 2X^3 + 2X$ et $T_3 = (1 + X^2) \times (6X^2 + 2) = 6X^4 + 8X^2 + 2$.
5) On démontre par récurrence sur n que T_n est un polynôme de degré $n + 1$ à coefficients dans $\mathbb{N}$.
C'est vrai pour $n = 0$ puisque $T_0 = X$ a pour degré 1.
Supposons le vrai pour un entier n. De $T_{n+1} = (1 + X^2)T_n'$ on déduit que T_{n+1} est un polynôme à coefficients entiers (T_n' l'étant) et qu'il a pour degré $n+2$ (le degré de T_n' est $n+1-1 = n$). On a bien démontré la propriété par récurrence.
6) Appliquons la formule de Taylor avec reste intégral :
si f est de classe C^{N+1} sur $[a, b]$ alors $f(b) = \sum_{k=0}^{N} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^N}{N!} f^{(N+1)}(t)\ dt$.
Prenons $f = \tan$, $a = 0$, $b = x$ et $N = 2n + 1$. La fonction tan étant impaire, ses dérivées d'ordre pair sont aussi des fonction impaires et donc s'annulent en 0. On obtient bien la formule demandée en posant $t_j = \tan^{(2j+1)}(0)$ et en utilisant $f^{(2n+2)}(t) = T_{2n+2}(\tan t)$.
7) On effectue une intégration par parties sur $[0, x] \subset I$:

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\ dt = \left[-\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t)\right]_0^x + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ dt = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + R_{n+1}(x)$$

8) a) Puisque $f^{(n)} \geqslant 0$ et $b > 0$ (donc $b - t \geqslant 0$), la suite $(R_n(b))$ est positive. De plus $R_{n+1}(b) = R_n(b) - \frac{b^n}{n!} f^{(n)}(0) \leqslant R_n(b)$. La suite est décroissante, minorée par 0 donc elle converge.

8) b) i) En effectuant le changement de variable défini par $t = xu$ on obtient :
$R_n(x) = \int_0^1 \frac{(x-xu)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(xu)x\ du = \frac{x^n}{(n-1)!} \int_0^1 (1-u)^{n-1} f^{(n)}(xu)\ du$.

ii) On sait déjà que $R_n(x) \geqslant 0$ puisque $x \geqslant 0$. Comme $f^{(n+1)} \geqslant 0$, la fonction $f^{(n)}$ est croissante donc $f^{(n)}(ux) \leqslant f^{(n)}(ub)$ et puisque $1 - u \geqslant 0$ et $x \geqslant 0$ on obtient bien la majoration demandée.

iii) Avec i. et ii. on obtient

$$R_n(x) \leqslant \left(\frac{x}{b}\right)^n \frac{b^n}{(n-1)!} \int_0^1 (1-u)^{n-1} f^{(n)}(tb)\ t = \left(\frac{x}{b}\right)^n R_n(b)$$

c) Appliquons à nouveau la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n pour la fonction f sur l'intervalle $[0, x]$ (avec $x > 0$).
$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + R_{n+1}(x)$ et puisque $0 \leqslant R_n(x) \leqslant \left(\frac{x}{b}\right)^n R_n(b)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ (car $0 < \frac{x}{b} < 1$) on obtient bien $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.
Puisque f est impaire, les $f^{(2n)}(0)$ sont nuls et l'égalité s'étend donc aux x dans $]-b, 0[$ par imparité des deux membres de l'égalité.
9) La fonction tan vérifie les conditions demandées pour f : elle est de classe C^∞ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan^{(n)}(x) = T_n(\tan(x)) \geqslant 0$ puisque T_n est à coefficients dans $\mathbb{N}$ et $\tan(x) \geqslant 0$. Pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ on peut trouver un $b \in \left]x, \frac{\pi}{2}\right[$ et le résultat du I B.8.(c) s'applique. Avec $\tan^{(2n)}(0) = 0$ et en posant $t_n = \tan^{(2n+1)}(0)$ on obtient le résultat demandé.
10) D'après la question précédente le rayon de convergence est au moins égal à $\frac{\pi}{2}$. Mais s'il était supérieur à $\frac{\pi}{2}$, la fonction tangente aurait une limite finie en $\frac{\pi}{2}$, ce qui est faux. Le rayon de convergence est donc égal à $\frac{\pi}{2}$.