Exercice 1 (MPSI) sur les points fixes :
Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$.

1. Facile et classique : dans cette question uniquement, on suppose que f est continue. Montrer que f admet un point fixe.
2. Plus difficile : on suppose que f est croissante (pas forcément continue).
   Soit $A = \{x \in [0, 1] | f(x) \leqslant x\}$. Justifier que $A \neq \emptyset$ puis que $f(A) \subset A$.
   Justifier l'existence de $a = \inf A$ et montrer que f admet un point fixe.

Exercice 2 sur les limites : théorème de Cesàro discret puis continu

1. Soit $f \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
   On suppose que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ et on désire établir
   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = \ell$$
   a. Pour $\varepsilon > 0$, justifier qu'il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \geqslant A$
   $$\left|\frac{1}{x}\int_A^x (f(t) - \ell)dt\right| \leqslant \varepsilon$$
   b. Conclure en écrivant
   $$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt - \ell = \frac{1}{x}\int_0^A (f(t) - \ell)\, dt + \frac{1}{x}\int_A^x (f(t) - \ell)\, dt$$
2. Rappeler le théorème de Cesàro pour les suites numériques et le démontrer.

Exercice 3 sur les formes linéaires positives
Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$. Soit L une forme linéaire sur E telle que si $f \geqslant 0$, alors $L(f) \geqslant 0$ (on rappelle qu'une forme linéaire est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$.

1. Donner au moins deux exemples de telles formes linéaires non colinéaires.
2. Montrer que L est croissante, c'est à dire que si $f \leqslant g$, alors $L(f) \leqslant L(g)$
3. Soit e la fonction constante égale à 1 sur $[0, 1]$. Montrer que $\forall f \in E, |L(f)| \leqslant |L(e)| \cdot \|f\|_\infty$. Que peut-on en déduire ?