Exercice MPSI :

Étudier pour $(a,b) \in \mathbb{R}_+^*$ la limite éventuelle de $\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}$ lorsque x tend vers 0^+.

Exercice MPSI :

Soient a et b deux réels, $a < b$. On considère la fonction $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ supposée continue et une suite récurrente $(u_n)_n$ définie par : $u_0 \in [a,b]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. On suppose ici que f est croissante. Montrer que $(u_n)_n$ est monotone et en déduire sa convergence vers une solution de l'équation $f(x) = x$.
2. *Application.* Calculer la limite de la suite définie par : $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{4u_n+5}{u_n+3}$.
3. On suppose maintenant que f est décroissante. Montrer que les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont monotones et convergentes.
4. *Application.* Soit $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (1-u_n)^2$. Calculer les limites des suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$.

Exercice 1

On munit $E = l^\infty(\mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel de suites bornées de la norme $\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.
On considère les endomorphismes Δ et C de E définis par : $\Delta(u) = v$ où $v_n = u_{n+1} - u_n$ et $C(u) = w$ où $w_n = \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n u_k$.
Montrer que Δ et C sont continus sur $(E, \|.\|_\infty)$ et calculer leurs normes.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application uniformément continue sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$. Montrer qu'il existe des réels a et b tels que $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leqslant a|x| + b$.

Exercice MPSI 1
On trouve $\sqrt{ab}$.
Exercice MPSI 2

1. Si $u_0 \leqslant u_1$ alors comme f est croissante $f(u_0) \leqslant f(u_1)$ donc $u_1 \leqslant u_2$, ensuite $f(u_1) \leqslant f(u_2)$ soit $u_2 \leqslant u_3$,... Par récurrence on montre que (u_n) est décroissante. Comme elle est minorée par a alors elle converge. Si $u_0 \leqslant u_1$ alors la suite (u_n) est croissante et majorée par b donc converge.

   Notons ℓ la limite de $(u_n)_n$. Comme f est continue alors $(f(u_n))$ tend vers $f(\ell)$. De plus la limite de $(u_{n+1})_n$ est aussi ℓ. En passant à la limite dans l'expression $u_{n+1} = f(u_n)$ nous obtenons l'égalité $\ell = f(\ell)$.
2. La fonction f définie par $f(x) = \frac{4x+5}{x+3}$ est continue et dérivable sur l'intervalle $[0, 4]$ et $f([0, 4]) \subset [0, 4]$. La fonction f est croissante (calculez sa dérivée). Comme $u_0 = 4$ et $u_1 = 3$ alors (u_n) est décroissante. Calculons la valeur de sa limite ℓ. ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$ soit $4x + 5 = x(x + 3)$. Comme $u_n \geqslant 0$ pour tout n alors $\ell \geqslant 0$. La seule solution positive de l'équation du second degré $4x+5 = x(x+3)$ est $\ell = \frac{1+\sqrt{21}}{2} = 2,7912\ldots$
3. Si f est décroissante alors $f \circ f$ est croissante (car $x \leqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y) \Rightarrow f \circ f(x) \leqslant f \circ f(y)$). Nous appliquons la première question avec la fonction $f \circ f$. La suite $(u_0, u_2 = f \circ f(u_0), u_4 = f \circ f(u_2), \ldots)$ est monotone et convergente. De même pour la suite $(u_1, u_3 = f \circ f(u_1), u_5 = f \circ f(u_3), \ldots)$.
4. La fonction f définie par $f(x) = (1-x)^2$ est continue et dérivable de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$. Elle est décroissante sur cet intervalle. Nous avons $u_0 = \frac{1}{2}$, $u_1 = \frac{1}{4}$, $u_2 = \frac{9}{16}$, $u_3 = 0,19\ldots$,... Donc la suite (u_{2n}) est croissante, nous savons qu'elle converge et notons ℓ sa limite. La suite (u_{2n+1}) et décroissante, notons ℓ' sa limite. Les limites ℓ et ℓ' sont des solutions de l'équation $f \circ f(x) = x$. Cette équation s'écrit $(1 - f(x))^2 = x$, ou encore $(1-(1-x)^2)^2 = x$ soit $x^2(2-x)^2 = x$. Il y a deux solutions évidentes 0 et 1. Nous factorisons le polynôme $x^2(2-x)^2 - x$ en $x(x-1)(x-\lambda)(x-\mu)$ avec λ et μ les solutions de l'équation $x^2 - 3x + 1$: $\lambda = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 0,3819\ldots$ et $\mu = \frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1$. Les solutions de l'équation $f \circ f(x) = x$ sont donc $\{0, 1, \lambda, \mu\}$. Comme (u_{2n}) est croissante et que $u_0 = \frac{1}{2}$ alors (u_{2n}) converge vers $\ell = 1$ qui est le seul point fixe de $[0, 1]$ supérieur à $\frac{1}{2}$. Comme (u_{2n+1}) est décroissante et que $u_1 = \frac{1}{4}$ alors (u_{2n+1}) converge vers $\ell' = 0$ qui est le seul point fixe de $[0, 1]$ inférieur à $\frac{1}{4}$.

Exercice 1
La linéarité de Δ est claire et de plus Δ est un endomorphisme de E car si u est une suite bornée, $\Delta(u)$ l'est encore. Plus précisément,

$$\forall u \in E,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |\Delta(u)_n| \leqslant |u_n| + |u_{n+1}| \leqslant 2\|u\|_\infty \text{ et donc } \forall u \in E,\ \|\Delta(u)\|_\infty \leqslant 2\|u\|_\infty.$$

Ceci montre que Δ est continu sur E et $|||\Delta||| \leqslant 2$. Ensuite, si u est la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$ alors u est un élément non nul de E tel que $\|u\|_\infty = 1$ et $\|\Delta(u)\|_\infty = 2$. En résumé,
- $\forall u \in E \setminus \{0\}$, $\frac{\|\Delta(u)\|_\infty}{\|u\|_\infty} \leqslant 2$,
- $\exists u \in E \setminus \{0\}$, $\frac{\|\Delta(u)\|_\infty}{\|u\|_\infty} = 2$.

On en déduit que Δ est continu sur $(E, \|\ \|_\infty)$ et $|||\Delta||| = 2$.
La linéarité de C est claire et C est un endomorphisme de E car si u est bornée, $C(u)$ l'est encore. Plus précisément,

$$\forall u \in E,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |(C(u))_n| \leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \|u\|_\infty = \|u\|_\infty \text{ et donc } \forall u \in E,\ \|C(u)\|_\infty \leqslant \|u\|_\infty.$$

Par suite T est continue sur E et $|||T||| \leqslant 1$. Ensuite, si u est la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$ alors u est un élément non nul de E tel que $\|u\|_\infty = 1$ et $\|C(u)\|_\infty = 1$. En résumé,
- $\forall u \in E \setminus \{0\}$, $\frac{\|C(u)\|_\infty}{\|u\|_\infty} \leqslant 1$,
- $\exists u \in E \setminus \{0\}$, $\frac{\|C(u)\|_\infty}{\|u\|_\infty} = 1$.

On en déduit que C est continu sur $(E, \|\ \|_\infty)$ et $|||C||| = 1$.
Exercice 2
Soit f une application uniformément continue sur $\mathbb{R}$. $\exists \alpha > 0 /\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(|x - y| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant 1)$.
Soit $x \in \mathbb{R}^+$ (le travail est analogue si $x \in \mathbb{R}^-$).
Pour $n \in \mathbb{N}$

$$|x - n\alpha| \leqslant \alpha \Leftrightarrow -\alpha \leqslant x - n\alpha \leqslant \alpha \Leftrightarrow \frac{x}{\alpha} - 1 \leqslant n \leqslant \frac{x}{\alpha} + 1 \Leftarrow n = E\left(\frac{x}{\alpha}\right).$$

On pose $n_0 = E\left(\frac{x}{\alpha}\right)$.

$$\begin{aligned}|f(x)| &\leqslant |f(x)-f(x-\alpha)|+|f(x-\alpha)-f(x-2\alpha)|+\ldots+|f(x-(n_0-1)\alpha)-f(x-n_0\alpha)|+|f(x-n_0\alpha)-f(0)|+|f(0)|\\ &\leqslant n_0+1+|f(0)| \text{ (car } |x-n_0\alpha-0|\leqslant\alpha)\\ &\leqslant \frac{x}{\alpha}+2+|f(0)|.\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $|f(x)| \leqslant \frac{x}{\alpha}+2+|f(0)|$. Par symétrie des calculs, $\forall x \in \mathbb{R}^-$, $|f(x)| \leqslant \frac{-x}{\alpha}+2+|f(0)|$ et donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant \frac{|x|}{\alpha}+2+|f(0)|$.
f uniformément continue sur $\mathbb{R} \Rightarrow \exists (a,b)\in\mathbb{R}^2/\ \forall x\in\mathbb{R},\ |f(x)\leqslant a|x|+b$.