Exercice MPSI :

Étudier pour $(a,b) \in \mathbb{R}_+^*$ la limite éventuelle de $\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}$ lorsque x tend vers 0^+.

Exercice MPSI :

Soient a et b deux réels, $a < b$. On considère la fonction $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ supposée continue et une suite récurrente $(u_n)_n$ définie par : $u_0 \in [a,b]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. On suppose ici que f est croissante. Montrer que $(u_n)_n$ est monotone et en déduire sa convergence vers une solution de l'équation $f(x) = x$.
2. *Application.* Calculer la limite de la suite définie par : $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{4u_n+5}{u_n+3}$.
3. On suppose maintenant que f est décroissante. Montrer que les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont monotones et convergentes.
4. *Application.* Soit $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (1-u_n)^2$. Calculer les limites des suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$.

Exercice 1

On munit $E = l^\infty(\mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel de suites bornées de la norme $\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.
On considère les endomorphismes Δ et C de E définis par : $\Delta(u) = v$ où $v_n = u_{n+1} - u_n$ et $C(u) = w$ où $w_n = \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n u_k$.
Montrer que Δ et C sont continus sur $(E, \|.\|_\infty)$ et calculer leurs normes.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application uniformément continue sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$. Montrer qu'il existe des réels a et b tels que $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leqslant a|x| + b$.