Exercice : Norme p de Minkowski

Soient $p > 1$ et $q > 1$ tel que $1/p + 1/q = 1$.

1. **a.** Soit $\Delta_y : x \mapsto \dfrac{\ln x - \ln y}{x - y}$. Montrer que Δ_y est décroissante sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{y\}$.

b. En déduire que pour tout $x < y$ réels strictement positifs et tout $t \in [0, 1]$,

$$\ln(tx + (1-t)y) \geqslant t\ln(x) + (1-t)\ln(y).$$

(on dit que la fonction ln est concave)

c. En déduire que pour $a, b \geqslant 0$,

$$ab \leqslant \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, on pose :

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} \quad \text{et} \quad \|y\|_q = \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{1/q}$$

2. Soit x et y dans $\mathbb{K}^n$ non nuls. Établir

$$\frac{|x_i y_i|}{\|x\|_p \|y\|_q} \leqslant \frac{1}{p}\frac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{|y_i|^q}{\|y\|_q^q}$$

et en déduire

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leqslant \|x\|_p \|y\|_q$$

3. En écrivant

$$(|x_i| + |y_i|)^p = |x_i|\,(|x_i| + |y_i|)^{p-1} + |y_i|\,(|x_i| + |y_i|)^{p-1}$$

justifier

$$\|x + y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p$$

4. Conclure que $\|.\|_p$ définit une norme sur $\mathbb{K}^n$.

Correction :

1. **a.** La dérivée (par rapport à x) de Δ_y est $\Delta_y' : x \mapsto \dfrac{(x-y)/x - \ln x + \ln y}{(x-y)^2} = \dfrac{1 - y/x + \ln(y/x)}{(x-y)^2}$ qui est du signe de $1 - y/x + \ln(y/x)$.

On pose $X = y/x$. Cela revient à étudier le signe de l'expression $\phi(X) = 1 - X + \ln X$ pour $X > 0$. On peut dériver à nouveau et étudier les variations de ϕ et retrouver que ϕ est croissante pour $X \leqslant 1$ puis décroissante pour $X \geqslant 1$ avec un maximum égal à $\phi(1) = 0$, ce qui se traduit par un résultat à connaitre : la droite d'équation $y = x - 1$ est une tangente située au dessus de la courbe de la fonction logarithme népérien.

Finalement, la dérivée Δ_y' est négative donc la fonction Δ_y est décroissante sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{y\}$.

b. Soit $x < y$. On remarque que pour $t \in]0,1[$, $tx+(1-t)y \in [x,y]$. Donc en particulier : $x \leqslant tx+(1-t)y$.

En utilisant la question précédente : $\Delta_y(x) \geqslant \Delta_y(tx + (1-t)y)$. Alors on obtient successivement :

$\dfrac{\ln x - \ln y}{x - y} \geqslant \dfrac{\ln(tx + (1-t)y) - \ln y}{tx + (1-t)y - y}$

$\dfrac{\ln x - \ln y}{x - y} \geqslant \dfrac{\ln(tx + (1-t)y) - \ln y}{t(x - y)}$

En multipliant par $t(x-y) < 0$, $t(\ln x - \ln y) \leqslant \ln(tx + (1-t)y) - \ln y$ soit exactement :

$t \ln x + (1-t)\ln y \leqslant \ln(tx + (1-t)y)$

c. En posant $x = a^p$, $y = b^q$ et $t = 1/p$, donc $1 - t = 1/q$, on obtient :

$p \ln a^p + 1/q \ln b^q \leqslant \ln(a^p/p + b^q/q)$ et en passant à l'exponentielle croissante sur $\mathbb{R}$, on obtient :

$\exp 1/p \ln a^p + 1/q \ln b^q \leqslant a^p/p + b^q/q$. Or $\exp(1/p \ln a^p + 1/q \ln b^q) = \exp(\ln a + \ln b) = ab$ d'où le résultat.

2. On applique ce résultat en posant $a = \dfrac{|x_i|}{\|x\|_p}$ et $b = \dfrac{|y_i|}{\|y\|_q}$ et on obtient :

$\dfrac{|x_i y_i|}{\|x\|_p \|y\|_q} \leqslant \dfrac{1}{p}\dfrac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p} + \dfrac{1}{q}\dfrac{|y_i|^q}{\|y\|_q^q}$

En sommant,

$\displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{|x_i y_i|}{\|x\|_p \|y\|_q} \leqslant 1/p + 1/q = 1$

puis

$\displaystyle\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leqslant \|x\|_p \|y\|_q$ (appelée inégalité de Hölder).

3. Commençons par remarquer que $\|x+y\|_p = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\displaystyle\sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^p\right)^{1/p}$ par inégalité triangulaire du module.

Alors $\displaystyle\sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^p \leqslant \sum_{i=1}^n |x_i|(|x_i| + |y_i|)^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i|(|x_i| + |y_i|)^{p-1}$

Et $\displaystyle\sum_{i=1}^n (|x_i|+|y_i|)^p \leqslant \|x\|_p \left(\sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^{(p-1)q}\right)^{1/q} + \|y\|_p \left(\sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^{(p-1)q}\right)^{1/q}$ d'après l'inégalité de Hölder.

On remarque alors que $(p-1)q = p(1-1/p)q = pq/q = p$ et on rappelle que $1/q = 1 - 1/p$...

Alors :

$\displaystyle\sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^p \leqslant (\|x\|_p + \|y\|_p) \left(\sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^p\right)^{1-1/p}.$

Alors en supposant que $\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^p\right) \neq 0$, on arrive à :

$\dfrac{\left(\sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^p\right)}{\left(\sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^p\right)^{1-1/p}} \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p$

Et finalement dans tous les cas :

$$\|x+y\|_p \leqslant \left(\sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^p\right)^{1/p} \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p$$