Exercice cours MPSI :

Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que $\left(\dfrac{(1-i\sqrt{3})^5}{(1-i)^3}\right)^n$ soit un réel positif

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout réel x, calculer :

$$C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) \text{ et } S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx).$$

Exercice 1 :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ayant n valeurs propres distinctes $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$.

1. Montrer que l'ensemble $C_A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / AM = MA\}$ des matrices carrées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec A est un espace vectoriel.
2. **a.** Soit B un élément de C_A. Soit λ une valeur propre de A. Montrer que $\forall X \in E_\lambda, BX \in E_\lambda$.
3. Montrer que $\mathrm{Vect}(\mathrm{I_n}, A, A^2, ..., A^{n-1}) \subset C_A$.
4. On veut maintenant étudier l'indépendance linéaire de la famille $\{\mathrm{I_n}, A, A^2, ..., A^{n-1}\}$. Pour cela, on considère n réels $\alpha_0, ..., \alpha_{n-1}$ tels que $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i A^i = 0$.
   a. Montrer que les (α_i) sont solution du système :

$$(*) \left\{ \begin{array}{ccccccccccc} \alpha_0 & + & \alpha_1\lambda_1 & + & \alpha_2\lambda_1^2 & + & ... & + & \alpha_{n-1}\lambda_1^{n-1} & = & 0 \\ \alpha_0 & + & \alpha_1\lambda_2 & + & \alpha_2\lambda_2^2 & + & ... & + & \alpha_{n-1}\lambda_2^{n-1} & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_0 & + & \alpha_1\lambda_n & + & \alpha_2\lambda_n^2 & + & ... & + & \alpha_{n-1}\lambda_n^{n-1} & = & 0 \end{array} \right.$$

   b. Démontrer par récurrence sur n que : $\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & ... & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & ... & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & ... & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i).$

   c. En déduire l'ensemble des solutions du système $(*)$ et conclure.
5. On admet que $\dim(C_A)$ est de dimension n (les 5/2 pourront le démontrer).
   Montrer que $C_A = \mathrm{Vect}(\mathrm{I_n}, A, A^2, ..., A^{n-1})$.

Conseils de lecture :

1. Exercice 84 d'algèbre de la banque CCP 2016
2. Exercice 89 d'analyse de la banque CCP 2016

Correction :

Exercice MPSI :

Pour mettre un complexe z non nul sous forme exponentielle, on divise par $|z|$.
Un complexe z est réel positif ssi $arg(z) = 2k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$.
$1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\pi/3}$ et $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$.
Donc $\left(\dfrac{(1-i\sqrt{3})^5}{(1-i)^3}\right)^n = (8\sqrt{2}e^{-11i\pi/12})^n$ est réel positif ssi $arg((8\sqrt{2}e^{-11i\pi/12})^n) = -\dfrac{11n\pi}{12} = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
il est donc nécessaire que $11n \in 24\mathbb{Z}$. Comme 11 est premier avec 24, on doit avoir $n \in 24\mathbb{Z}$. Réciproquement, tout $n \in 24\mathbb{N}$ convient.
Les solutions sont donc les éléments de $24\mathbb{N}$.
Si $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, on a $C_n(x) = n+1$ et $S_n(x) = 0$.
Sinon, $C_n(x) + iS_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(e^{ix})^k = \dfrac{(e^{ix})^{n+1} - 1}{(e^{ix}) - 1}$.
En factorisant par l'arc moitié en haut et en bas :
$C_n(x) + iS_n(x) = \dfrac{(e^{i(n+1)x/2})}{(e^{ix/2})} \cdot \dfrac{(e^{i(n+1)x/2} - (e^{-i(n+1)x/2}))}{(e^{ix/2}) - (e^{-ix/2})}$
En identifiant les parties réelles et imaginaires, on trouve :
$C_n(x) = \cos(nx/2)\dfrac{\sin((n+1)x/2}{\sin(x/2)}$
et
$S_n(x) = \sin(nx/2)\dfrac{\sin((n+1)x/2}{\sin(x/2)}$

Exercice 1 :

1. Soit $(M, N) \in C_A$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. $u(\lambda M + \mu N) = \lambda AM + \mu AN = \lambda MA + \mu NA = (\lambda M + \mu N)A$. Donc C_A est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $X \in E_\lambda$. $ABX = BAX = B(\lambda X) = \lambda BX$ donc $BX \in E_\lambda$.
3. $A \cdot A^i = A^i \cdot A$. Donc $\forall i \in \{0, ..., n-1\}, A^i \in C_A$. Ainsi $\mathrm{Vect}(I_n, A, ..., A^{n-1}) \subset C_A$.
4. Soit $X \in E_{\lambda_k} \setminus \{0\}$. $A^i X = \lambda_k^i X$. Donc $(\sum \alpha_i A^i)X = \sum \alpha_i A^i X = (\sum \alpha_i \lambda_k^i)X = 0$. Or $X \neq 0$, donc il existe une coordonnée $x_i \neq 0$ de X telle que $(\sum \alpha_i \lambda_k^i)x_i = 0$ et finalement : $\sum \alpha_i \lambda_k^i = 0$.
5. C'est un déterminant de Vandermonde (transposé par rapport à ce qu'on a fait en cours). Les λ_k sont supposés être tous distincts. Donc ce déterminant est non nul.
   La famille $(I_n, A, ..., A^{n-1})$ est donc libre.
6. On a $\dim \mathrm{Vect}(I_n, A, ..., A^{n-1}) = n = \dim C_A$ et $\mathrm{Vect}(I_n, A, ..., A^{n-1}) \subset C_A$ donc $\mathrm{Vect}(I_n, A, ..., A^{n-1}) = C_A$