Exercice cours MPSI :

1. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on définit $f_a : x \mapsto e^{ax}$. Montrer que $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre.
2. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on définit $g_a : x \mapsto |x-a|$. Montrer que $(g_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $h_n : x \mapsto \cos(x^n)$. Montrer que $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre.

Exercice 1 :
Soit $(a_0, ..., a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, $x \in \mathbb{C}$. Calculer

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x & 0 & & a_0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \ddots & x & a_{n-2} \\ 0 & & -1 & x + a_{n-1} \end{vmatrix}$$

en développant par rapport à la dernière colonne.
On rappelle le calcul de déterminant par bloc :

$$\left|\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline (0) & C \end{array}\right| = \det A \times \det C$$

Exercice 2 :
Soit A une matrice carrée d'ordre n. On suppose que A est inversible et que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de A.

1. Démontrer que $\lambda \neq 0$.
2. Démontrer que si $\vec{x}$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre λ alors il est vecteur propre de A^{-1} de valeur propre λ^{-1} .

Exercice 3 :
Soit E un espace vectoriel sur un corps K ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et u un endomorphisme de E. On suppose u nilpotent, c'est-à-dire qu'il existe un entier strictement positif n tel que $u^n = 0$.

1. Montrer que u n'est pas inversible.
2. Déterminer les valeurs propres de u et les sous-espaces propres associés.

Corrections :

Exercice MPSI :

De manière générale, les familles $\mathcal{F} = (f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ sont infinies. Pour montrer la liberté, il suffit de montrer que si on en extrait une famille finie, cette famille est libre.

Pour éviter de terminer la preuve par "et on recommence...", on prépare proprement une récurrence :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et P_n la propriété : "toute sous-famille finie de cardinal n de $\mathcal{F}$ est libre."

Initialisation : P_1 est vraie car la fonction nulle n'est pas dans $\mathcal{F}$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que P_{n-1} est vraie. Montrons que P_n est vraie.

On commence donc par écrire : soient $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ réels DISTINCTS. Montrons que $(f_{a_1}, f_{a_2}, \ldots f_{a_n})$ est libre.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ des réels tels que $\phi = \sum \lambda_i f_{a_i} = 0$ (la fonction nulle). Alors :

1. L'idée est d'échelonner les fonctions par leur comportement asymptotique, en $+\infty$ par exemple : par l'absurde, si λ_n n'était pas nul, on aurait $\phi(x) \sim_{x+\infty} \lambda_n f_{a_n}(x) \neq 0$. Contradiction ,donc λ_n est nul.
2. L'idée est d'utiliser la propriété "être dérivable en a" : par l'absurde, si λ_n n'était pas nul, on aurait $x \mapsto \lambda_n|x-a_n| = -\lambda_1|x-a_1| - \lambda_2|x-a_2| \ldots - \lambda_{n-1}|x-a_{n-1}|$. Or $x \mapsto \lambda_n|x-a_n|$ n'est pas dérivable en a_n tandis que $x \mapsto -\lambda_1|x-a_1| - \lambda_2|x-a_2| \ldots - \lambda_{n-1}|x-a_{n-1}|$ l'est. Contradiction donc λ_n est nul.
3. Pour échelonner les h_n, on peut par exemple considérer le comportement de leurs dérivées en 0 : pour $n > 0$, si λ_n n'était pas nul, on aurait $\phi'(x) \sim_{x\to 0} \lambda_n h_n'(x) \sim_{x\to 0} \lambda_n n x^{2n-1} \neq 0$. Contradiction, donc λ_n est nul.

Dans chaque cas, on conclut que par hypothèse de récurrence, la famille $(f_{a_i})_{1\leqslant i\leqslant n-1}$ est de cardinal $n-1$, et donc libre et tous les autres λ_i sont nuls. D'où le résultat.

Exercice 1 :

On a vu en cours une méthode de calcul plus astucieuse qui consiste à ajouter à la première ligne la somme $\sum_{k=2}^n x^{k-1} L_k$, puis de développer par rapport à la première ligne :

$$\begin{vmatrix} x & 0 & & a_0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \ddots & x & a_{n-2} \\ 0 & & -1 & x+a_{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & & \left(\sum_{k=0}^n a_k x^k\right) \\ -1 & x & \ddots & \vdots \\ & \ddots & x & a_{n-2} \\ 0 & & -1 & x+a_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+1} \cdot \left(\sum_{k=0}^n a_k x^k\right) \begin{vmatrix} -1 & x & (0) \\ & \ddots & x \\ 0 & & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} \cdot (-1)^{n-1} \cdot \left(\sum_{k=0}^n a_k x^k\right) = \left(\sum_{k=0}^n a_k x^k\right).$$

Mais revenons à l'exercice :

Le calcul du déterminant de taille $(n-1)\times(n-1)$:

$$\Gamma_k = \left|\begin{array}{cccc|cccc} x & & & & & & & \\ -1 & x & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & -1 & x & & & & \\ \hline & & & & -1 & x & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & \ddots & x \\ & & & & & & & -1 \end{array}\right|$$

où le bloc en haut à gauche est de taille $k\times k$ se fait par le produit des déterminants par blocs :

$$\left|\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline (0) & C \end{array}\right| = \det A \times \det C$$

Contrairement à l'habitude on développe par rapport à la colonne qui a le moins de 0. En développant par rapport à la dernière colonne on obtient :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x & 0 & & a_0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \ddots & x & a_{n-2} \\ 0 & & -1 & x+a_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1}a_0 \begin{vmatrix} -1 & x & & \\ & -1 & x & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & -1 \end{vmatrix} + (-1)^n a_1 \begin{vmatrix} x & & & & \\ & -1 & x & & \\ & & -1 & x & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & -1 \end{vmatrix}$$

$$+ \cdots + (-1)^{2n-3}a_{n-2} \begin{vmatrix} x & & & & \\ -1 & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & -1 & x & \\ & & & & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{2n-2}(x+a_{n-1}) \begin{vmatrix} x & & & \\ -1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & x \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^{n-1+k}a_k \times \Gamma_k \quad + \quad (-1)^{2n-2}(x+a_{n-1})\Gamma_{n-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^{n-1+k}a_k \times x^k \times (-1)^{n-1-k} \quad + \quad (x+a_{n-1})x^{n-1}$$

$$= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$$

Exercice 2 :

Soit A une matrice carrée d'ordre n. On suppose que A est inversible et que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de A.

1. *Démontrons que* $\lambda \neq 0$. Si $\lambda = 0$ est valeur propre de A, alors $\ker A \neq \{0\}$, donc A n'est pas injective et sa matrice ne peut pas être inversible. Par conséquent, $\lambda \neq 0$.
2. *Démontrons que si $\vec{x}$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre λ alors il est vecteur propre de A^{-1} de valeur propre λ^{-1} .*
   Comme A est inversible, on a $A\vec{x} = \lambda\vec{x} \iff A^{-1}(A\vec{x}) = A^{-1}(\lambda\vec{x}) \iff \vec{x} = \lambda A^{-1}\vec{x}$, d'où $A^{-1}\vec{x} = \lambda^{-1}\vec{x}$. Ce qui prouve que $\vec{x}$ est vecteur propre de A^{-1} de valeur propre λ^{-1}.

Exercice 3 :

Soit E un espace vectoriel sur un corps K ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et u un endomorphisme de E. On suppose u nilpotent, c'est-à-dire qu'il existe un entier strictement positif n tel que $u^n = 0$.

1. Montrons que u n'est pas inversible.
   On a : $0 = \det u^n = (\det u)^n$, d'où $\det u = 0$, ce qui prouve que u n'est pas inversible.
2. Déterminons les valeurs propres de u et les sous-espaces propres associés.
   Soit λ une valeur propre de u, il existe alors un vecteur $x \in E$ non nul tel que $u(x) = \lambda x$. Or, $u(x) = \lambda x \Rightarrow u^n(x) = \lambda^n x$. Mais, $u^n(x) = 0$ et $x \neq 0$, d'où $\lambda^n = 0$ et donc $\lambda = 0$. La seule valeur propre possible de u est donc 0 et c'est une valeur propre car, comme u n'est pas inversible, le noyau de u n'est pas réduit à $\{0\}$. L'endomorphisme u admet donc 0 comme unique valeur propre, le sous-espace propre associé est $\ker u$.