Exercice MPSI

Exercice :Polynômes de Tchebychev

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $(P, Q) \in E^2$, on pose $\varphi(P, Q) = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note T_n le n-ème polynôme de Tchebychev de première espèce c'est-à-dire l'unique polynôme tel que $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

2. **a.** Montrer que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthogonale de l'espace préhilbertien (E, φ).

b. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\|T_n\|$.

Exercice : Matrices et déterminants de Gram

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer par double inclusion que $Ker(M) = Ker({}^tM \cdot M)$.
Soit E un espace préhilbertien réel.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, ..., x_n)$ dans E^n, on pose $G(x_1, ..., x_n) = (x_i|x_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ (matrice de Gram) puis $\gamma(x_1, ..., x_n) = \det(G(x_1, ..., x_n))$ (déterminant de Gram). Soit β une BON de E. Soit $M = Mat_\beta(x_1, \ldots, x_n)$.

2. Vérifier que $G(x_1, \ldots, x_n) =^t M \cdot M$.

3. Soit Montrer que $\mathrm{rg}(G(x_1, ..., x_n)) = \mathrm{rg}(x_1, ..., x_n)$.

4. Montrer que la famille $(x_1, ..., x_n)$ est liée si et seulement si $\gamma(x_1, ..., x_n) = 0$ et que la famille $(x_1, ..., x_n)$ est libre si et seulement si $\gamma(x_1, ..., x_n) > 0$.

5. On suppose que la famille $(x_1, ..., x_n)$ est libre dans E. On pose $F = \mathrm{Vect}(x_1, ..., x_n)$. Pour $x \in E$, on note $p_F(x)$ la projection orthogonale de x sur F puis $d(x, F)$ la distance de x à F (c'est-à-dire $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$). Montrer que $d(x, F) = \sqrt{\frac{\gamma(x, x_1, ..., x_n)}{\gamma(x_1, ..., x_n)}}$.

Une correction :

Exercice MPSI

Exercice 1 :

1. • Soit $(P,Q)\in E^2$. L'application $t\mapsto \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $]-1,1[$. Ensuite, l'application $t\mapsto \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1+t}}$ est bornée au voisinage de 1 car continue en 1 et donc quand t tend vers 1, $\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1+t}}\times\frac{1}{\sqrt{1-t}}=O\left(\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$. Puisque $\frac{1}{2}<1$, on en déduit que l'application $t\mapsto\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur un voisinage de 1 à gauche. De même, quand t tend vers 1, $\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}=O\left(\frac{1}{\sqrt{1+t}}\right)$ et l'application $t\mapsto\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur un voisinage de -1 à droite. Finalement, l'application $t\mapsto\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur $]-1,1[$ et $\varphi(P,Q)$ existe.

• La symétrie, la bilinéarité et la positivité de φ sont claires. De plus, pour $P\in E$,

$$\begin{aligned}\varphi(P,P)=0 &\Rightarrow \int_{-1}^{1}\frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=0\\ &\Rightarrow \forall t\in]-1,1[,\ \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}=0 \text{ (fonction continue, positive, d'intégrale nulle)}\\ &\Rightarrow \forall t\in]-1,1[, P(t)=0\Rightarrow P=0 \text{ (polynôme ayant une infinité de racines).}\end{aligned}$$

Ainsi, l'application φ est définie et finalement l'application φ est un produit scalaire sur E.

2. **a.** Soit $(n,p)\in\mathbb{N}^2$. En posant $t=\cos\theta$, on obtient

$$\varphi(T_n,T_p)=\int_{-1}^{1}\frac{T_n(t)T_p(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=\int_{\pi}^{0}\frac{T_n(\cos\theta)T_p(\cos\theta)}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}\,(-\sin\theta d\theta)=\int_0^{\pi}\cos(n\theta)\cos(p\theta)\,d\theta.$$

Si de plus, $n\neq p$,

$$\varphi(T_n,T_p)=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\cos((n+p)\theta)+\cos((n-p)\theta))\,d\theta=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n+p)\theta)}{n+p}+\frac{\sin((n-p)\theta)}{n-p}\right]_0^{\pi}=0.$$

Ainsi, la famille $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale. De plus, on sait que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\deg(T_n)=n$ et on a donc montré que la famille $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthogonale de l'espace préhilbertien (E,φ).

b. Soit $n\in\mathbb{N}$. Quand $p=n$, la formule précédente fournit

$$\|T_n\|^2=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos(2n\theta))\,d\theta=\begin{cases}\pi \text{ si } n=0\\ \frac{\pi}{2} \text{ si } n\geqslant 1\end{cases},$$

et donc

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \|T_n\|=\begin{cases}\sqrt{\pi} \text{ si } n=0\\ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{ si } n\geqslant 1\end{cases}.$$

Exercice 2 :

1. Soit $F=\text{Vect}(x_1,...,x_n)$ et $m=\dim F$. Soit $\mathcal{B}=(e_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ une base orthonormée de F puis M la matrice de la famille $(x_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ dans la base $\mathcal{B}$ .M est une matrice rectangulaire de format (m,n).
Soit $(i,j)\in[\![1,m]\!]\times[\![1,n]\!]$. Puisque la base $\mathcal{B}$ est orthonormée, le coefficient ligne i, colonne j de la matrice ${}^tMM$ est

$$\sum_{k=1}^{m}m_{k,i}m_{k,j}=(x_i|x_j),$$

et on a donc

$$G(x_1,x_2,...,x_n)={}^tMM.$$

Puisque $\text{rg}(x_1,...,x_n)=\text{rg}M$, il s'agit de vérifier que $\text{rg}({}^tMM)=\text{rg}M$. Pour cela, montrons que les matrices M et ${}^tMM$ ont même noyau.
Soit $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $X\in\text{Ker}M\Rightarrow MX=0\Rightarrow {}^tMMX=0\Rightarrow X\in\text{Ker}({}^tMM)$ et aussi

$$X \in \mathrm{Ker}({}^tMM) \Rightarrow {}^tMMX = 0 \Rightarrow {}^tX{}^tMMX = 0 \Rightarrow {}^t(MX)MX = 0 \Rightarrow \|MX\|_2^2 = 0 \Rightarrow MX = 0 \Rightarrow X \in \mathrm{Ker}M.$$

Finalement, $\mathrm{Ker}({}^tMM) = \mathrm{Ker}M$ et donc, d'après le théorème du rang, $\mathrm{rg}(x_1, ..., x_n) = \mathrm{rg}M = \mathrm{rg}({}^tMM) = \mathrm{rg}(G(x_1, x_2, ..., x_n))$.
$\mathrm{rg}(G(x_1, x_2, ..., x_n)) = \mathrm{rg}(x_1, \dots, x_n)$.

2. D'après 1),

$$\begin{aligned}(x_1, ..., x_n) \text{ liée} &\Leftrightarrow \mathrm{rg}(x_1, x_2, ..., x_n) <\Leftrightarrow \mathrm{rg}G(x_1, x_2, ..., x_n) < n \Leftrightarrow G(x_1, x_2, ..., x_n) \notin \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})\\ &\Leftrightarrow \gamma(x_1, x_2, ..., x_n) = 0.\end{aligned}$$

De plus, quand la famille $(x_1, x_2, ..., x_n)$ libre, avec les notations de la question 1), on a $m = n$ et la matrice M est une matrice carrée. On peut donc écrire

$$\gamma(x_1, x_2, ..., x_n) = \det({}^tMM) = \det({}^tM) \times \det(M) = (\det M)^2 > 0.$$

$(x_1, ..., x_n)$ liée $\Leftrightarrow \gamma(x_1, \dots, x_n) = 0$
$(x_1, ..., x_n)$ libre $\Leftrightarrow \gamma(x_1, \dots, x_n) > 0$.

3. Soit x un vecteur de E et $p_F(x)$ son projeté orthogonal sur F. Dans la première colonne de $\gamma(x, x_1, \dots, x_n)$, le théorème de Pythagore permet d'écrire (puisque $x - p_F(x) \in F^\perp$)

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}(x|x)\\(x|x_1)\\ \vdots\\(x|x_n)\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\|x - p_F(x) + p_F(x)\|^2\\(x - p_F(x) + p_F(x)|x_1)\\ \vdots\\(x - p_F(x) + p_F(x)|x_n)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x)\|^2\\(p_F(x)|x_1)\\ \vdots\\(p_F(x)|x_n)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\|x - p_F(x)\|^2\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}(p_F(x)|p_F(x))\\(p_F(x)|x_1)\\ \vdots\\(p_F(x)|x_n)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Après avoir remplacé aussi en première ligne les $(x|x_i)$ par $(p_F(x)|x_i)$, on obtient par linéarité par rapport à la première colonne

$$\gamma(x, x_1, x_2, ..., x_n) = \gamma(x - p_F(x), x_1, x_2, ..., x_n) + \gamma(p_F(x), x_1, x_2, ..., x_n)$$

Maintenant, $p_F(x)$ est dans F et donc la famille $(p_F(x), x_1, x_2, ..., x_n)$ est liée puis d'après la question 2) $\gamma(p_F(x), x_1, x_2, ..., x_n) = 0$. Il reste $\gamma(x, x_1, x_2, ..., x_n) = \gamma(x - p_F(x), x_1, x_2, ..., x_n)$ et en développant suivant la première colonne, on obtient

$$\forall x \in E,\ \gamma(x, x_1, \dots, x_n) = \gamma(x - p_F(x), x_1, x_2, ..., x_n) = \|x - p_F(x)\|^2\gamma(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Finalement
$\|x - p_F(x)\| = \sqrt{\frac{\gamma(x, x_1, x_2, \dots, x_n)}{\gamma(x_1, x_2, \dots, x_n)}}$.