Exercice 1 :
Soient $f : E \mapsto F$ et $g : F \mapsto G$ deux applications.

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective et f surjective, alors g est injective.
2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g est injective, alors f est surjective.

Exercice 2 :
On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ et f l'application : $P \mapsto f(P) = X(P(X) - P(X-1))$.

1. Vérifier que f est un endomorphisme du $\mathbb{R}$-ev E.
2. Former la matrice A de f dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ de E.
3. Déterminer le noyau, l'image, le rang de f.
4. ***Définition :*** *on dit que λ est une valeur propre de f si et seulement s'il existe un polynôme $P \in E$ NON NUL telle que $f(P) = \lambda \cdot P$.*
   Montrer que λ est valeur propre de f ssi $det(f - \lambda Id_E) = 0$.
5. Quelles sont les valeurs propres de f ?

Conseils de lecture :

1. Exercice 59 d'algèbre de la banque CCP 2016
2. Exercice 60 d'algèbre de la banque CCP 2016

CORRECTIONS :

Exercice 1 :

1. Soient y_1, y_2 dans F tels que $g(y_1) = g(y_2)$. La fonction f est surjective donc il existe x_1, x_2 dans E tels que $f(x_i) = y_i$. Alors $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Comme $g \circ f$ est injective, $x_1 = x_2$ et par suite, $y_1 = y_2$. Donc g est injective.
2. Soit $y \in F$ et $z = g(y)$. Par surjectivité de $g \circ f$, il existe x dans E tel que $g \circ f(x) = z$. Alors $g \circ f(x) = g(y)$ et par injectivité de g, $y = f(x)$, donc f est surjective.

Exercice 2 :

1. On a, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$: $f(\alpha P + Q) = X((\alpha P + Q)(X) - (\alpha P + Q)(X-1) = X(\alpha P(X) + Q(X) - \alpha P(X-1) - Q(X-1)) = \alpha X(P(X) - P(X-1)) + X(Q(X) - Q(X-1)) = \alpha f(P) + f(Q)$
   Donc f est linéaire.
   Soit $P \in E = \mathbb{R}_n[X]$. On a alors $P(X) - P(X-1) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, car les termes de degré n se simplifient. Puis $f(P) \in E$ par degré d'un produit de polynômes.
   Finalement, f est bien un endomorphisme.
2. Soit $j \in [0, n]$. $f(X^j) = X(X^j - (X-1)^j) = X(X^j - \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} (-1)^{j-i} X^i) = X(-\sum_{i=0}^{j-1} \binom{j}{i} (-1)^{j-i} X^i) = \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j}{i} (-1)^{j-i-1} X^{i+1} = \sum_{k=1}^{j} \binom{j}{k-1} (-1)^{j-k} X^k$ en faisant un changement d'indice.

   La matrice de f est donc triangulaire supérieure : $A = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 1 & & * & \\ & & \ddots & & \\ & & & j & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & n \end{pmatrix}$ avec $a_{k,j} = (-1)^{j-k} \binom{j}{k-1}$.
3. *Noyau :* Puisque A est triangulaire, que le premier terme diagonal est nul et que les autres termes diagonaux sont tous non nuls, $\ker(f)$ est de dimension 1, de base (1).
   Rang : D'après le théorème du rang, $rg(f) = dim(E) - dim \ker(f) = (n+1) - 1 = n$.
   Image : Par définition de f, on a ; $\forall P \in E, f(P) = X \cdot (...) \in X\mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc $\mathrm{Im}(f) \subset X\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Par argument d'inclusion-dimension, on conclut $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(X, X^2, X^3, \ldots, X^n)$.
4. Le réel λ est une valeur propre si et seulement s'il existe $P \neq 0$ tel que $f(P) = \lambda P$ si et seulement s'il existe P non nul tel que $(f - \lambda Id_E)(P) = 0$ si et seulement si $\ker(f - \lambda Id_E) \neq \{0\}$ ssi $\ker(A - \lambda I_{n+1}) \neq \{0\}$ ssi λ est une valeur de la diagonale de A.
5. La matrice de $f - \lambda Id_E$ est triangulaire supérieure. Son déterminant est égal au produit des éléments diagonaux. Les valeurs propres sont donc les valeurs sur la diagonalen, c'est à dire : $0, 1, \ldots, n$.