Exercice 1 :
On note $\star$ la loi interne dans $G = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ définie, pour tous $(z,t),(z',t') \in G$ par :

$$(z,t) \star (z',t') =' z + z', t + t' + Im(\overline{z}z')).$$

Montrer que $(G, \star)$ est un groupe. Est-il commutatif ?
Exercice 2 :
Soient $(G, \cdot)$ un groupe, e son neutre, $a, b \in G$ tels que $ba = ab^2$ et $ab = ba^2$. Montrer que $a = b = e$
Exercice 3 :
Montrer que les groupes $(\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{Z}^2, +)$ ne sont pas isomorphes.

CORRECTIONS :
Exercice 1 :
Vérifier l'associativité de la loi $\star$ par le calcul, vérifier que $\star$ est une loi interne et que $(0,0)$ est le neutre.
Ensuite, pour (z,t) donné, on cherche (z',t') symétrique tel que $(z,t) \star (z',t') = (0,0)$.
En écrivant un système on finit par trouver $z' = -z$ et $t' = -t$.
Donc G est un groupe.
Exercice 2 :
On a $ab = ab^2 = (ab)b = (ba^2)b = (ba)(ab)$. Comme ba est inversible dans G, en multipliant les deux membres par $(ab)^{-1}$ à gauche, on obtient $e = ab$. Donc $b = a^{-1}$ et $ba = e$. Ensuite, $e = ab = ba^2 = (ba)a = ea = a$ et donc $a = e$ et finalement $b = e$.
Exercice 3 :
Par l'absurde, si f est un tel isomorphisme, soit $(a,b) = f(1)$.
Comme f est unisomorphisme, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $f(n) = (1,0)$. Alors $(1,0) = f(n) = nf(1) = n(a,b) = (na, nb)$ Donc $na = 1$ et $nb = 0$. Donc $n \neq 0$ et finalement $b = 0$.
En procédant de même à partir de $(0,1)$, on obtiendrait que $a = 0$.
Alors $f(1) = (0,0) = f(0)$ car f est un morphisme de groupes, ce qui contredit l'injectivité de f.