Exercice MPSI :
Soient a et b deux réels, $a < b$. On considère la fonction $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ supposée continue et une suite récurrente $(u_n)_n$ définie par : $u_0 \in [a,b]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. On suppose ici que f est croissante. Montrer que $(u_n)_n$ est monotone et en déduire sa convergence vers une solution de l'équation $f(x) = x$.
2. *Application.* Calculer la limite de la suite définie par : $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{4u_n+5}{u_n+3}$.
3. On suppose maintenant que f est décroissante. Montrer que les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont monotones et convergentes.
4. *Application.* Soit $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (1-u_n)^2$. Calculer les limites des suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$.

Exercice : Norme p de Minkowski
Soient $p > 1$ et $q > 1$ tel que $1/p + 1/q = 1$.

1. **a.** Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$ et $\Delta_y : x \mapsto \dfrac{\ln x - \ln y}{x - y}$. Montrer que Δ_y est décroissante sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{y\}$.

   b. En déduire que pour tout $x < y$ réels strictement positifs et tout $t \in [0,1]$,
   $$\ln(tx + (1-t)y) \geqslant t\ln(x) + (1-t)\ln(y).$$
   (on dit que la fonction ln est concave)

   c. En déduire que pour $a, b \geqslant 0$,
   $$ab \leqslant \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$
   Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, on pose :
   $$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} \quad \text{et} \quad \|y\|_q = \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{1/q}$$

2. Soit x et y dans $\mathbb{K}^n$ non nuls. Établir
   $$\frac{|x_i y_i|}{\|x\|_p \|y\|_q} \leqslant \frac{1}{p}\frac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{|y_i|^q}{\|y\|_q^q}$$
   et en déduire
   $$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leqslant \|x\|_p \|y\|_q$$

3. En écrivant
   $$(|x_i| + |y_i|)^p = |x_i|\left(|x_i| + |y_i|\right)^{p-1} + |y_i|\left(|x_i| + |y_i|\right)^{p-1}$$
   justifier
   $$\|x+y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p$$

4. Conclure que $\|.\|_p$ définit une norme sur $\mathbb{K}^n$.

ELEMENTS DE CORRECTION

Exercice MPSI :

1. On distingue les cas :

1er cas : si $u_1 \leqslant u_0$, alors comme f est croissante, $f(u_1) \leqslant f(u_0)$, c'est à dire $u_2 \leqslant u_1$. Par récurrence, on démontre que la propriété $u_{n+1} \leqslant u_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite est alors décroissante. Comme elle est minorée par a, elle converge vers un réel x. De plus, comme f est continue en x, si $u_n \longrightarrow x$, alors $u_{n+1} = f(u_n) \longrightarrow f(x)$. Par unicité de la limite, on en déduit que x est un point fixe de f.

2ème cas : si $u_1 \geqslant u_0$, on montre de manière similaire que (u_n) est croissante. Comme elle est majorée par b elle converge vers $x \in [a, b]$. On vérifie aussi que $f(x) = x$...

2. La fonction $x \mapsto \dfrac{4x+5}{x+3}$ est croissante sur $[0, 5]$ et on vérifie que $f([0, 5]) \subset [0, 5]$ qui est donc un intervalle stable par f et permet de définir la suite récurrente initialisée à $u_0 = 4$.

D'après ce qui précède, la suite (u_n) converge vers un point fixe de f dans $[0, 5]$. On résout $f(x) = x$ sur $[0, 5]$: c'est à dire $\dfrac{4x+5}{x+3} = x \Leftrightarrow x^2 - x - 5 = 0$.

On trouve deux candidats, dont un qui est négatif donc hors de l'intervalle. Finalement, $x = \dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$.

3. La fonction f est décroissante. Donc la fonction $f \circ f$ est croissante. La suite (u_{2n}) est récurrente en posant $u_0 \in [a, b]$ et $u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = f \circ f(u_{2n})$.

Les résultats de la question 1 s'appliquent donc et la suite (u_{2n}) est monotone et converge vers un réel x tel que $x = f \circ f(x)$.

On obtient le même résultat pour (u_{2n+1}).

4. Soit $f : x \mapsto (1-x)^2$ définie sur $[0, 1]$ (qui est un intervalle stable contenant $1/2$).

Alors $f \circ f(x) = (1 - (1-x)^2)^2 = (2x - x^2)^2 = x^2(2-x)^2$.

Les points fixes de $f \circ f$ sur $[0, 1]$ vérifient $x^2(2-x)^2 = x$. Le réel 0 est solution. Si $x \neq 0$, on se ramène à $(x-1)(x^2 - 3x + 1) = 0$, c'est à dire $x = 1$, ou $x = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ (l'autre solution $\dfrac{2+\sqrt{5}}{2}$ est en dehors de l'intervalle $[0, 1]$).

$u_0 = 1/4$ et $u_1 = (1 - 1/4)^2 = 9/16$. On remarque que $1/4 < \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} < 9/16$.

Puis $u_2 = (1 - 9/16)^2 = \dfrac{7^2}{16^2} < 1/4$ donc la suite (u_{2n}) est décroissante et converge vers un point fixe de $f \circ f$ inférieur à $1/4$. Il ne reste plus que 0 comme candidat possible. Donc (u_{2n}) converge vers 0.

Enfin, $u_3 = ... > u_1 = 9/16$. Donc la suite (u_{2n+1}) est croissante et converge vers une limite qui est supérieure à u_1. Il ne reste que 1 comme candidat possible. Donc (u_{2n+1}) converge vers 1.

Finalement, (u_n) est divergente.

Norme de Minkowski :

1. a. La dérivée (par rapport à x) de Δ_y est $\Delta'_y : x \mapsto \dfrac{(x-y)/x - \ln x + \ln y}{(x-y)^2} = \dfrac{1 - y/x + \ln(y/x)}{(x-y)^2}$ qui est du signe de $1 - y/x + \ln(y/x)$.

On pose $X = y/x$. Cela revient à étudier le signe de l'expression $\phi(X) = 1 - X + \ln X$ pour $X > 0$. On peut dériver à nouveau et étudier les variations de ϕ et retrouver que ϕ est croissante pour $X \leqslant 1$ puis décroissante pour $X \geqslant 1$ avec un maximum égal à $\phi(1) = 0$, ce qui se traduit par un résultat à connaitre : la droite d'équation $y = x - 1$ est une tangente située au dessus de la courbe de la fonction logarithme népérien.

Finalement, la dérivée Δ'_y est négative donc la fonction Δ_y est décroissante sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{y\}$.

b. Soit $x < y$. On remarque que pour $t \in]0, 1[$, $tx + (1-t)y \in [x, y]$. Donc en particulier : $x \leqslant tx + (1-t)y$. En utilisant la question précédente : $\Delta_y(x) \geqslant \Delta_y(tx + (1-t)y)$. Alors on obtient successivement :

$$\frac{\ln x - \ln y}{x - y} \geqslant \frac{\ln(tx + (1-t)y) - \ln y}{tx + (1-t)y - y}$$

$$\frac{\ln x - \ln y}{x - y} \geqslant \frac{\ln(tx + (1-t)y) - \ln y}{t(x - y)}$$

En multipliant par $t(x-y)<0$, $t(\ln x - \ln y) \leqslant \ln(tx+(1-t)y) - \ln y$ soit exactement :
$t\ln x + (1-t)\ln y \leqslant \ln(tx+(1-t)y)$

c. En posant $x = a^p$, $y = b^q$ et $t = 1/p$, donc $1-t = 1/q$, on obtient :
$p\ln a^p + 1/q\ln b^q \leqslant \ln(a^p/p + b^q/q)$ et en passant à l'exponentielle croissante sur $\mathbb{R}$, on obtient : $\exp 1/p \ln a^p + 1/q \ln b^q \leqslant a^p/p + b^q/q$. Or $\exp(1/p\ln a^p + 1/q\ln b^q) = \exp(\ln a + \ln b) = ab$ d'où le résultat.

2. On applique ce résultat en posant $a = \dfrac{|x_i|}{\|x\|_p}$ et $b = \dfrac{|y_i|}{\|y\|_q}$ et on obtient :

$\dfrac{|x_iy_i|}{\|x\|_p\|y\|_q} \leqslant \dfrac{1}{p}\dfrac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p} + \dfrac{1}{q}\dfrac{|y_i|^q}{\|y\|_q^q}$

En sommant,

$\displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{|x_iy_i|}{\|x\|_p\|y\|_q} \leqslant 1/p + 1/q = 1$

puis

$\displaystyle\sum_{i=1}^n |x_iy_i| \leqslant \|x\|_p\|y\|_q$ (appelée inégalité de Hölder).

3. Commençons par remarquer que $\|x+y\|_p = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\displaystyle\sum_{i=1}^n (|x_i|+|y_i|)^p\right)^{1/p}$ par inégalité triangulaire du module.

Alors $\displaystyle\sum_{i=1}^n (|x_i|+|y_i|)^p \leqslant \sum_{i=1}^n |x_i|(|x_i|+|y_i|)^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i|(|x_i|+|y_i|)^{p-1}$

Et $\displaystyle\sum_{i=1}^n (|x_i|+|y_i|)^p \leqslant \|x\|_p \left(\sum_{i=1}^n (|x_i|+|y_i|)^{(p-1)q}\right)^{1/q} + \|y\|_p \left(\sum_{i=1}^n (|x_i|+|y_i|)^{(p-1)q}\right)^{1/q}$ d'après l'inégalité de Hölder.

On remarque alors que $(p-1)q = p(1-1/p)q = pq/q = p$ et on rappelle que $1/q = 1-1/p$...

Alors :

$\displaystyle\sum_{i=1}^n (|x_i|+|y_i|)^p \leqslant (\|x\|_p + \|y\|_p)\left(\sum_{i=1}^n (|x_i|+|y_i|)^p\right)^{1-1/p}.$

Alors en supposant que $\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n (|x_i|+|y_i|)^p\right) \neq 0$, on arrive à :

$\dfrac{(\sum_{i=1}^n (|x_i|+|y_i|)^p)}{(\sum_{i=1}^n (|x_i|+|y_i|)^p)^{1-1/p}} \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p$

Et finalement dans tous les cas :

$$\|x+y\|_p \leqslant \left(\sum_{i=1}^n (|x_i|+|y_i|)^p\right)^{1/p} \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p$$