

Rédiger au moins l'exercice de MPSI et un des 2 exercices.

Exercice cours MPSI :

Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que $\left(\frac{(1-i\sqrt{3})^5}{(1-i)^3}\right)^n$ soit un réel positif

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout réel x , calculer :

$$C_n(x) = \sum_{k=0}^n \cos(kx) \text{ et } S_n(x) = \sum_{k=0}^n \sin(kx).$$

Méthode : pour résoudre un système de congruence du type

$$\begin{cases} x \equiv a_1[n_1] \\ x \equiv a_2[n_2] \\ x \equiv a_3[n_3] \end{cases},$$

avec n_1, n_2, n_3 2 à 2 premiers entre eux, on applique une première fois le théorème des restes chinois de sorte de ramener

$$\begin{cases} x \equiv a_1[n_1] \\ x \equiv a_2[n_2] \end{cases},$$

à une relation équivalente $x \equiv b[n_1 n_2]$, puis on résout le système

$$\begin{cases} x \equiv b[n_1 n_2] \\ x \equiv a_3[n_3] \end{cases}$$

Cette méthode se généralise bien sûr aux cas de systèmes de p congruences...

Exercice 1 :

Une bande de 17 pirates dispose d'un butin composé de N pièces d'or d'égale valeur. Ils décident de se le partager également et de donner le reste au cuisinier (non pirate). Celui-ci reçoit 3 pièces. Mais une rixe éclate et 6 pirates sont tués. Tout le butin est reconstitué et partagé entre les survivants comme précédemment ; le cuisinier reçoit alors 4 pièces. Dans un naufrage ultérieur, seuls 6 pirates, le cuisinier et le butin sont sauvés. Le butin est à nouveau partagé de la même manière et le cuisinier reçoit 5 pièces.

Traduire ces données à l'aide d'un système de congruences.

Quelle est alors la fortune minimale que peut espérer le cuisinier lorsqu'il décide d'empoisonner le reste des pirates ?

Exercice 2 :

On note A l'ensemble des suites réelles bornées et I l'ensemble des suites réelles convergeant vers 0.

1. Vérifier que A est un anneau pour les lois usuelles et que I est un idéal de A .
2. Existe-t-il $a \in A$ tel que $I = aA$?
3. L'idéal I est-il premier, c'est à dire tel que $\forall (u, v) \in A^2, (u \times v \in I \Rightarrow (u \in I \text{ ou } v \in I))$?
4. Existe-t-il un idéal strictement inclus entre I et A , c'est à dire un idéal J de A tel que $I \subset J \subset A$ tel que $I \neq J$ et $J \neq A$?
5. Déterminer le radical \sqrt{I} de I défini par $\sqrt{I} = \{u \in A : \exists p \in \mathbb{N}^*, u^p \in I\}$.

CORRECTIONS :

Exercice MPSI :

Pour mettre un complexe z non nul sous forme exponentielle, on divise par $|z|$.

Un complexe z est réel positif ssi $\arg(z) = 2k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

$$1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\pi/3} \text{ et } 1 - i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}.$$

Donc $\left(\frac{(1 - i\sqrt{3})^5}{(1 - i)^3}\right)^n = (8\sqrt{2}e^{-11i\pi/12})^n$ est réel positif ssi $\arg((8\sqrt{2}e^{-11i\pi/12})^n) = -\frac{11n\pi}{12} = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

il est donc nécessaire que $11n \in 24\mathbb{Z}$. Comme 11 est premier avec 24, on doit avoir $n \in 24\mathbb{Z}$. Réciproquement, tout $n \in 24\mathbb{N}$ convient.

Les solutions sont donc les éléments de $24\mathbb{N}$.

Si $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, on a $C_n(x) = n + 1$ et $S_n(x) = 0$.

$$\text{Sinon, } C_n(x) + iS_n(x) = \sum_{k=0}^n (e^{ix})^k = \frac{(e^{ix})^{n+1} - 1}{(e^{ix}) - 1}.$$

En factorisant par l'arc moitié en haut et en bas :

$$C_n(x) + iS_n(x) = \frac{(e^{i(n+1)x/2})}{(e^{ix/2})} \cdot \frac{(e^{i(n+1)x/2} - (e^{-i(n+1)x/2}))}{(e^{ix/2}) - (e^{-ix/2})}$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, on trouve :

$$C_n(x) = \cos(nx/2) \frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}$$

et

$$S_n(x) = \sin(nx/2) \frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}$$

Exercice 1 :

Soit n le nombre de pièces du trésor. On traduit les hypothèses en écrivant que $n \equiv 3[17]$, $n \equiv 4[11]$ et $n \equiv 5[6]$. C'est donc un système de 3 équations à congruence. On remarque que 17, 11 et 6 sont deux à deux premiers entre eux.

En particulier, $2 \cdot 17 - 3 \cdot 11 = 1$.

$$\text{--- Donc } -33 \equiv 1[17] \text{ et } (-3) \cdot 11 = -99 \equiv 3[17].$$

$$\text{--- Donc } 34 \equiv 1[11] \text{ et } 4 \cdot 34 = 136 \equiv 4[11].$$

Donc, $n_0 = -99 + 136 = 37$ vérifie à la fois $n_0 \equiv 3[17]$ et $n_0 \equiv 4[11]$.

On peut donc par théorème chinois réduire le système $\begin{cases} n \equiv 3[17] \\ n \equiv 4[11] \end{cases}$ à l'équation $n \equiv 37[11 \times 17] \equiv 37[187]$.

On cherche donc n tel que $n \equiv 37[187]$ et $n \equiv 5[6]$.

En remarquant que $1 \cdot 187 - 31 \cdot 6 = 1$ et par le procédé précédent, on obtient les solutions du système initial sous la forme $n \equiv 785[1122]$.

Donc la fortune minimale du trésor est de 785 pièces...

Exercice 2 :

1. la suite constante égale à 1 est bornée donc dans A . Pour toutes suites (u, v) bornées, $u - v$ est bornée et uv est bornée.

La suite nulle converge vers 0 donc $0 \in I$. Si $(u, v) \in I^2$, $u - v \in I$ par théorème opératoire sur les limites de suites convergentes vers 0. Si a est une suite bornée et si u converge vers 0, le produit converge vers 0 par théorème des gendarmes en prenant la valeur absolue et en majorant $|a|$ par une borne réelle.

I est donc un idéal de A .

2. Non : l'idéal I n'est pas monogène.

Supposons par l'absurde qu'il existe a tel que $I = aA$. Alors $u_1 = (\frac{1}{n+1})_{\mathbb{N}^*}$ est un élément de A donc il existe $a_1 \in A$ telle que $u_1 = a_1 \cdot a$.

Ainsi, nécessairement, a ne s'annule jamais car u_1 ne s'annule jamais. Remarquons que $a \in I \Rightarrow \sqrt{a} \in I$.

Il existe donc une suite $a_2 \in A$ telle que $\sqrt{a} = a_2 \cdot a$. Or nécessairement, $a_2 = \frac{1}{\sqrt{a}}$ qui n'est pas bornée donc ne peut pas appartenir à A . Contradiction et résultat.

3. Soit u telle que $u_n = n[2]$ et v telle que $v_n = (n+1)[2]$. Alors $u \times v = 0 \in I$. Pourtant ni u ni v ne converge vers 0. Donc I n'est pas premier.
4. Soit J l'ensemble des suites réelles u telles que (u_{2n}) soit bornée et que (u_{2n+1}) converge vers 0. Vérifier que $I \subset J \subset A$ et que J est un idéal.
5. Soit a dans A et $p \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$a^p \in I \Leftrightarrow a_n^p \rightarrow 0 \Leftrightarrow a_n \rightarrow 0 \Leftrightarrow a \in I.$$

Donc $\sqrt{I} = I$.