Pour le mercredi 12 décembre 2018

Exercice MPSI

On se propose de montrer le théorème de Darboux :

1. Soit $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable sur $[a,b]$ telle que $\varphi'(a) > 0$ et $\varphi'(b) < 0$. Montrer que φ admet un maximum sur $[a,b]$.

2. Montrer que ce maximum ne peut pas être atteint en a ni en b.

3. En déduire que φ' s'annule.

4. Montrer le théorème de Darboux : si f est dérivable sur I, alors $f'(I)$ est un intervalle.

5. Rappeler un contre exemple d'une fonction g non continue mais telle que pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, $g(I)$ est un intervalle.

Exercice (Règle de Raabe-Duhamel)

Soit $\sum u_n$ une série à termes dans $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\alpha}{n} + v_n$ où la série $\sum v_n$ converge absolument.

(1) : On pose $a_n = n^\alpha u_n$. Montrer que la série $\sum \ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ converge.

(2) : En déduire la nature, selon le réel α de la série $\sum u_n$.

Pour le mercredi 12 décembre 2018

Exercice MPSI

On se propose de montrer le théorème de Darboux :

1. Soit $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable sur $[a,b]$ telle que $\varphi'(a) > 0$ et $\varphi'(b) < 0$. Montrer que φ admet un maximum sur $[a,b]$.

2. Montrer que ce maximum ne peut pas être atteint en a ni en b.

3. En déduire que φ' s'annule.

4. Montrer le théorème de Darboux : si f est dérivable sur I, alors $f'(I)$ est un intervalle.

5. Rappeler un contre exemple d'une fonction g non continue mais telle que pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, $g(I)$ est un intervalle.

Exercice (Règle de Raabe-Duhamel)

Soit $\sum u_n$ une série à termes dans $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\alpha}{n} + v_n$ où la série $\sum v_n$ converge absolument.

(3) : On pose $a_n = n^\alpha u_n$. Montrer que la série $\sum \ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ converge.

(4) : En déduire la nature, selon le réel α de la série $\sum u_n$.