Exercices en temps libre : Semaine 1

Rédiger au moins l'exercice de MPSI et un des 2 exercices.

Exercice cours MPSI :

Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que $\left(\dfrac{(1-i\sqrt{3})^5}{(1-i)^3}\right)^n$ soit un réel positif

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout réel x, calculer :

$$C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) \text{ et } S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx).$$

Méthode : pour résoudre un système de congruence du type

$$\begin{cases} x \equiv a_1[n_1] \\ x \equiv a_2[n_2] \\ x \equiv a_3[n_3] \end{cases},$$

avec n_1, n_2, n_3 2 à 2 premiers entre eux, on applique une première fois le théorème des restes chinois de sorte de ramener

$$\begin{cases} x \equiv a_1[n_1] \\ x \equiv a_2[n_2] \end{cases},$$

à une relation équivalente $x \equiv b[n_1 n_2]$, puis on résout le système

$$\begin{cases} x \equiv b[n_1 n_2] \\ x \equiv a_3[n_3] \end{cases}$$

Cette méthode se généralise bien sûr aux cas de systèmes de p congruences...

Exercice 1 :

Une bande de 17 pirates dispose d'un butin composé de N pièces d'or d'égale valeur. Ils décident de se le partager également et de donner le reste au cuisinier (non pirate). Celui ci reçoit 3 pièces. Mais une rixe éclate et 6 pirates sont tués. Tout le butin est reconstitué et partagé entre les survivants comme précédemment ; le cuisinier reçoit alors 4 pièces. Dans un naufrage ultérieur, seuls 6 pirates, le cuisinier et le butin sont sauvés. Le butin est à nouveau partagé de la même manière et le cuisinier reçoit 5 pièces.
Traduire ces données à l'aide d'un système de congruences.
Quelle est alors la fortune minimale que peut espérer le cuisinier lorsqu'il décide d'empoisonner le reste des pirates ?

Exercice 2 :

On note A l'ensemble des suites réelles bornées et I l'ensemble des suites réelles convergeant vers 0.

1. Vérifier que A est un anneau pour les lois usuelles et que I est un idéal de A.
2. Existe-t-il $a \in A$ tel que $I = aA$?
3. L'idéal I est-il premier, c'est à dire tel que $\forall (u,v) \in A^2, (u \times v \in I \Rightarrow (u \in I \text{ ou } v \in I))$?
4. Existe-t-il un idéal strictement inclus entre I et A, c'est à dire un idéal J de A tel que $I \subset J \subset A$ tel que $I \neq J$ et $J \neq A$?
5. Déterminer le radical $\sqrt{I}$ de I défini par $\sqrt{I} = \{u \in A : \exists p \in \mathbb{N}^*, u^p \in I\}$.