e3a 2011 **Épreuve de Mathématiques B MP**

Exercice I

Le commutant $\mathcal{C}(A)$ d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

La phrase « On suppose dans tout cet exercice que : $\chi_A = P_A$ pour une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. »est pour le moins mal venue. Dans tout l'exercice, on fixe une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ vérifiant $\chi_A = P_A$. On peut noter que, dans les trois questions de l'exercice, la donnée est P_A, polynôme de degré 3 ; le théorème de Cayley-Hamilton assure donc l'égalité $\chi_A = P_A$ (à un facteur $(-1)^3$ près, suivant la convention sur le polynôme caractéristique).

1. (a) La matrice A a un polynôme caractéristique scindé, à racines simples, donc est diagonalisable ; de plus ses sous-espaces propres sont de dimension 1.

   (b) Si B commute avec A, elle stabilise les trois sous-espaces propres de A, qui sont des droites. Ces trois droites sont donc dirigées par des vecteurs propres de B. Une base de vecteurs propres de A est donc ausi une base de vecteurs propres de A : B et A sont simultanément diagonalisables.

   (c) Interpolation de Lagrange (α, β, γ distincts). On peut imposer la condition supplémentaire $\deg T \leqslant 2$.

   (d) D'après la remarque faite en 1.b, il existe une matrice $P \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{C})$ telle que $A = P.\text{diag}(\alpha, \beta, \gamma).P^{-1}$ et $B = P.\text{diag}(a, b, c).P^{-1}$. Alors $\text{diag}(a, b, c) = T(\text{diag}(\alpha, \beta, \gamma))$ et $B = T(A)$.

   (e) Le commutant de A est donc inclus dans l'algèbre commutative $\mathbb{C}[A]$ des polynômes en A. L'inclusion inverse est vérifiée pour tout matrice. Donc $\mathcal{C}(A) = \mathbb{C}[A]$. Avec la remarque du 1.c, $\mathcal{C}(A) = \mathbb{C}_2[A]$ et, comme P_A est de degré 3, (I_3, A, A^2) est une base de $\mathcal{C}(A)$.

2. (a) Par définition, P_A est un polynôme annulateur de A, donc $(A - \lambda I_3)^3 = 0$. En termes d'endomorphismes, $g^3 = 0$. De plus, comme P_A est le polynôme minimal de A, $(A - \lambda I_3)^2 \neq 0$, donc $g^2 \neq 0$: g est nilpotent d'indice 2.

   (b) On vérifie facilement que, pour tout vecteur $u \in \mathbb{C}^3$ tel que $g^2(u) \neq 0$, la famille $\mathcal{B} = (u, g(u), g^2(u))$ est libre. Comme l'espace vectoriel est de dimension 3, cette famille est une base de $\mathbb{C}^3$. Dans une telle base, g a pour matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   (c) Tout d'abord, h commute avec f, donc avec g. On en déduit $h(g(u)) = g(h(u)) = x_1 g(u) + x_2 g^2(u)$ et $h(g^2(u)) = g^2(h(u)) = x_1 g^2(u)$. La matrice de h dans $\mathcal{B}$ vaut donc $\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 \\ x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix} = x_1 I_3 + x_2 N + x_3 N^2$.

   (d) On en déduit $h = x_1 Id + x_2 g + x_3 g^2$, puis, en substituant $f - \lambda Id$ à g, l'existence d'un polynôme T de degré au plus 2 tel que $h = T(f)$. Matriciellement, $H = T(A)$.

   (e) On conclut comme au 1.e.

3. (a) Le polynôme P_A est annulateur de A, donc de f. Comme $X - \lambda_1$ et $(X - \lambda_2)^2$ sont premiers entre eux, d'après le lemme des noyaux, $\mathbb{C}^3 = \ker(f - \lambda_1 Id) \oplus \ker(f - \lambda_2 Id)^2$.

   (b) Comme λ_1 est une valeur propre simple de f (de multiplicité 1 dans χ_A), le sous-espace propre associé $\ker(f - \lambda_1 Id)$ est de dimension 1 ; donc $\ker(f - \lambda_2 Id)^2$ est de dimension 2. De plus, c'est le noyau d'un polynôme en f, donc il est stable par f. Dans une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{C}^3$ adaptée à la décomposition du 3.a, la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$, où U représente $\widetilde{f} = f|_{\ker(f - \lambda_2 Id)^2}$. Comme $(\widetilde{f} - \lambda_2 Id)^2 = 0$, $N = U - \lambda_2 I_2$ vérifie $N^2 = 0$.

   Si $N = 0$, alors la matrice de f dans $\mathcal{B}'$ est diagonale, f est diagonalisable et son polynôme minimal est à racines simples. Comme ce n'est pas le cas, $N \neq 0$: N est nilpotente d'indice 2.

   (c) (α) $M \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} M \Leftrightarrow \begin{cases} L(U - \lambda_1 I_2) = 0 \\ (U - \lambda_1 I_2)C = 0 \\ UV = VU \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L(U - \lambda_1 I_2) = 0 \\ (U - \lambda_1 I_2)C = 0 \\ VN = NV \end{cases}$

   Comme U admet comme polynôme annulateur $(X - \lambda_2)^2$, sa seule valeur propre est λ_2, donc $U - \lambda_1 I_2$ est inversible. On en déduit $M \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} M \Leftrightarrow \begin{cases} L = 0 \\ C = 0 \\ VN = NV \end{cases}$

   (β) Il s'agit de reprendre avec U le raisonnement des questions 2.a, b, c et d. On peut imposer la condition supplémentaire $\deg R \leqslant 1$.

(γ) Les conditions imposées signifient que λ_1 est racine de $S-\mu$ et que λ_2 est racine au moins double de $S-R$; autrement dit, que S vérifie $\begin{cases} S(\lambda_1)=\mu \\ (S-R)(\lambda_2)=0 \\ (S-R)'(\lambda_2)=0 \end{cases}$, ou encore $\begin{cases} S(\lambda_1)=\mu \\ S(\lambda_2)=R(\lambda_2) \\ S'(\lambda_2)=R'(\lambda_2) \end{cases}$.

Or l'application Δ définie de $\mathbb{C}_2[X]$ dans $\mathbb{C}^3$ par $\Delta(P)=(P(\lambda_1),P(\lambda_2),P(\lambda_2))$ est linéaire, injective (si $\Delta(P)=0$, alors P est de degré au plus 2 et possède au moins 3 racines comptées avec leur multiplicité, donc vaut 0), entre deux espaces vectoriels de même dimension finie ; donc Δ est un isomorphisme. D'où l'existence de $S\in\mathbb{C}_2[X]$ satisfaisant les conditions $\begin{cases} S(\lambda_1)=\mu \\ S(\lambda_2)=R(\lambda_2) \\ S'(\lambda_2)=R'(\lambda_2) \end{cases}$.

(δ) $S\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} S(\lambda_1) & 0 \\ 0 & S(U) \end{pmatrix}$. Or $S(\lambda_1)=\mu$; de plus, comme $(X-\lambda_2)^2$ est annulateur de U, $S(U)=R(U)$. Donc $S\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & R(U) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}=M$.

(d) Soit $B\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et b l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à B. Alors B commute avec A si et seulement si b commute avec f, *i.e.* $M=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(b)$ commute avec $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$. C'est encore équivalent (la réciproque de 3.c.δ est évidente) à l'existence d'un polynôme $S\in\mathbb{C}_2[X]$ tel que $S\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}\right)=M$, *i.e.* $S(f)=b$, *i.e.* $S(A)=B$. Comme dans les questions 1 et 2, $\mathcal{C}(A)=\mathbb{C}_2[A]$ et $\mathcal{C}(A)$ est de dimension 3.