CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques B MP

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit

Exercice I :

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients complexes, le polynôme caractéristique d'une matrice A est noté $\mathcal{X}_A$, le polynôme minimal de la matrice A est noté P_A.

On appelle commutant de la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, l'ensemble $\mathcal{C}(A)$ des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, qui commutent avec la matrice A.

On suppose dans tout cet exercice que : $\mathcal{X}_A = P_A$ pour une matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

1) On suppose dans cette question que P_A est à racines simples α, β et γ.

   a) Montrer que la matrice A est diagonalisable.
   b) Soit B une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ qui commute avec la matrice A, montrer que la matrice B est diagonalisable.
   c) Montrer qu'il existe un polynôme T de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant

$$\begin{cases} T(\alpha) = a \\ T(\beta) = b \\ T(\gamma) = c \end{cases}$$

   où a, b, c sont les valeurs propres de la matrice B.
   d) En déduire que le polynôme T de $\mathbb{C}[X]$ vérifie l'égalité :

$$B = T(A).$$

   e) En déduire le commutant de la matrice A.

2) On suppose, dans cette question, qu' il existe un nombre complexe λ tel que : $P_A = (X - \lambda)^3$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$, tel que la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{C}^3$ soit la matrice A.

a) Montrer que l'endomorphisme $g = f - \lambda Id$ est nilpotent d'indice 3, c'est à dire vérifiant les relations suivantes : $\begin{cases} g^3 = 0 \\ g^2 \neq 0 \end{cases}$.

b) Montrer qu'il existe un vecteur u de $\mathbb{C}^3$ tel que la famille $\left(u, g(u), g^2(u)\right)$ soit une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^3$.

c) Soit H une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ qui commute avec la matrice A. On appelle h l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ tel que la matrice de h dans la base canonique de $\mathbb{C}^3$ soit la matrice H et on note $h(u) = x_1 u + x_2 g(u) + x_3 g^2(u)$ où x_1, x_2, x_3 sont trois nombres complexes. Déterminer, en fonction de x_1, x_2, x_3, la matrice de h dans la base $\mathcal{B}$.

d) Montrer qu'il existe un polynôme Q de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant :

$$H = Q(A).$$

e) En déduire le commutant de la matrice A.

3) On suppose, dans cette question, qu' il existe deux nombres complexes distincts, λ_1 et λ_2 tels que :

$$P_A = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)^2.$$

a) Montrer que :

$$\mathbb{C}^3 = \operatorname{Ker}(f - \lambda_1 Id) \oplus \operatorname{Ker}(f - \lambda_2 Id)^2.$$

b) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{C}^3$ telle que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ soit de la forme $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$avec $U = \lambda_2 I_2 + N$, I_2 désigne la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et N est une matrice appartenant à $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, nilpotente d'indice 2, c'est à dire vérifiant les propriétés suivantes : $\begin{cases} N^2 = 0 \\ N \neq 0 \end{cases}$

c) On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} \mu & L \\ C & V \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ où $\begin{cases} \mu \in \mathbb{C} \\ L \in \mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{C}) \\ C \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C}) \\ V \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{C}) \end{cases}$, on suppose que les matrices M et $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$ commutent.

α) Montrer que :

$$\begin{cases} L = 0 \\ C = 0 \\ NV = VN \end{cases}$$

β) Montrer qu'il existe un polynôme R de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant $R(U) = V$.

γ) Montrer qu'il existe un polynôme S de $\mathbb{C}[X]$ tel que $\begin{cases} X - \lambda_1 \text{ divise } S - \mu \\ (X - \lambda_2)^2 \text{ divise } S - R \end{cases}$

δ) En déduire que $S\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}\right) = M$.

d) Déterminer le commutant de la matrice A.