

DEVOIR SURVEILLÉ n° 7 (4H)

Problème 1

Dans ce problème, toutes les fonctions sont définies sur un intervalle I de \mathbb{R} et à valeurs réelles.

Partie I : Partie préliminaire

Dans cette partie, les questions sont indépendantes les unes des autres et leurs résultats peuvent être admis dans la suite du problème.

1. Justifier, pour tout réel $x \in]-1, 1[$, l'existence de $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$ et donner sa valeur.
2. On rappelle que la fonction Γ est définie pour tout réel $x \in]0, +\infty[$ par : $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.
Démontrer que pour tout réel $x \in]0, +\infty[$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et en déduire, pour tout entier naturel n non nul la valeur de $\Gamma(n)$.
3. Démontrer la formule de Taylor avec reste intégral : si I est un intervalle contenant le réel a , si f est une fonction de I dans \mathbb{R} de classe C^∞ sur I , alors pour tout réel $x \in I$ et tout entier naturel n , on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Partie II : théorème d'unicité du développement en série entière

On rappelle le théorème suivant : Si une fonction f admet un développement en série entière sur $] -a, a[$, alors :

- la fonction f est de classe C^∞ sur $] -a, a[$,
- son développement en série entière est unique et est donné par la série de Taylor de la fonction

$$f \text{ à l'origine : } \forall x \in] -a, a[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

4. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(0) = 1$ et pour tout réel $x \neq 0$, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.
Démontrer que la fonction f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .
5. Expliciter une fonction f de classe C^∞ sur un voisinage de 0 et vérifiant pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ l'égalité $f^{(n)}(0) = n \cdot n!$.
6. **Un théorème des moments**

Soit f une fonction développable en série entière sur $] -R, R[$ avec $R > 1$:

$$\forall x \in] -R, R[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

On suppose que pour tout entier naturel n , $\int_0^1 x^n f(x) dx = 0$.

L'objectif de cette question est de montrer que f est identiquement nulle sur $] -R, R[$.

- a. Démontrer que la série $\sum_{n \geq 0} f(x) \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ converge normalement sur l'intervalle $[0, 1]$.
- b. À l'aide du calcul de $\int_0^1 (f(x))^2 dx$, démontrer que la fonction f est nulle sur l'intervalle $[0, 1]$.
- c. Démontrer que f est la fonction nulle sur l'intervalle $] - R, R[$.

Contre-exemples

7. Donner un exemple de fonction f à la fois de classe C^∞ sur un intervalle I et développable en série entière au voisinage de l'origine, mais qui ne coïncide pas avec sa série de Taylor en 0 sur I tout entier.
8. **Un exemple de fonction ne coïncidant avec sa série de Taylor en 0 sur aucun voisinage de 0.**

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

pour tout réel $x \neq 0$, $f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ et $f(0) = 0$.

- a. Rappeler l'allure de la courbe de la fonction f au voisinage de 0.
- b. Par des théorèmes généraux, la fonction f est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$. Démontrer que pour tout entier naturel n , il existe un polynôme P_n tel que :
- pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$.
- c. Démontrer que la fonction f est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ avec pour tout entier naturel n , $f^{(n)}(0) = 0$.
Par parité, la fonction f ainsi définie est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .
- d. La fonction f est-elle développable en série entière sur un intervalle $] - r, r[$ pour un $r > 0$?

9. **Un exemple où la série de Taylor de la fonction f en 0 a un rayon nul.**

Pour tout x réel, on pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+tx^2}$.

- a. Justifier que pour tout réel x la fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{1+tx^2}$ est bien intégrable sur $[0, +\infty[$, puis démontrer que la fonction est de classe C^1 sur \mathbb{R} .
On admettra que la fonction f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} et que l'on obtient les dérivées successives en dérivant sous le signe intégrale.
- b. Pour $t \in]0, +\infty[$, calculer au moyen de la série entière de $x \mapsto \frac{1}{1+tx^2}$, dont on précisera le rayon de convergence, les dérivées successives en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{e^{-t}}{1+tx^2}$ pour en déduire l'expression de $f^{(n)}(0)$ pour tout entier naturel n .
- c. Quel est le rayon de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$?

Condition suffisante

On se propose dans cette partie d'étudier une condition suffisante pour qu'une fonction de classe C^∞ sur un intervalle centré en 0 soit développable en série entière au voisinage de 0.

10. Soient a un réel strictement positif et f une fonction de classe C^∞ sur l'intervalle $] - a, a[$. On suppose qu'il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout réel $x \in] - a, a[$ et pour tout entier naturel n , $|f^{(n)}(x)| \leq M$.
- a. Démontrer que la fonction f est développable en série entière au voisinage de l'origine.
- b. Donner un exemple simple de fonction non polynomiale pour laquelle ce résultat s'applique.

Problème 2

n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2

$S_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices symétriques réelles, carrées de taille n .

$S_n^+(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices de $S_n(\mathbb{R})$ dont toute valeur propre est positive ou nulle.

$S_n^{++}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices de $S_n(\mathbb{R})$ dont toute valeur propre est strictement positive.

Pour toute matrice M , on note $m_{i,j}$ le coefficient de M situé dans la i -ème ligne et la j -ème colonne de M .

Partie I

Soit S une matrice de $S_n^+(\mathbb{R})$. Le but de cette partie est d'établir l'inégalité (1) :

$$\det(S) \leq \prod_{i=1}^n s_{i,i}.$$

1. Soit X_i la matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ composée de 0 sauf en i -ème ligne où le coefficient est égal à 1. Que vaut ${}^t X_i S X_j$?
2. Rappeler le résultat matriciel du théorème spectral.
On note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de S .
3. En déduire :
 - a. qu'il existe M élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $S = {}^t M M$;
 - b. que pour tout X élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: ${}^t X S X \geq 0$;
 - c. que pour tout $i \in [1, n]$, $s_{i,i} \geq 0$.
4. On suppose dans cette question que S est une matrice de $S_n^{++}(\mathbb{R})$. Démontrer
 - a. qu'il existe M élément de $GL_n(\mathbb{R})$ tel que $S = {}^t M M$;
 - b. que pour tout X élément non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: ${}^t X S X > 0$;
 - c. que pour tout $i \in [1, n]$, $s_{i,i} > 0$.
5. On suppose dans cette question que S est une matrice de $S_n^+(\mathbb{R})$ mais pas de $S_n^{++}(\mathbb{R})$. Établir l'inégalité (1) pour S .
6. On suppose dans cette question que S est une matrice de $S_n^{++}(\mathbb{R})$ et que pour tout $i \in [1, n]$, $s_{i,i} = 1$.
 - a. Montrer que la fonction exponentielle est convexe sur \mathbb{R} .
 - b. En déduire que $\sqrt[n]{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i$.
 - c. Démontrer que l'inégalité (1) est vérifiée par S .
7. On suppose dans cette question que S est une matrice de $S_n^{++}(\mathbb{R})$. Soit T la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout i dans $[1, n]$, $t_{i,i} = \frac{1}{\sqrt{s_{i,i}}}$ et B la matrice définie par $B = T S T$.
 - a. Montrer que pour tout X élément non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: ${}^t X B X > 0$.
 - b. En déduire que $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
 - c. Démontrer que l'inégalité (1) est vérifiée par S .

Partie II

Dans cette partie, on utilise l'inégalité (1) de la partie I pour établir l'inégalité de Hadamard.
Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

8. Vérifier que l'on peut appliquer l'inégalité (1) à tAA .
 9. En déduire l'inégalité de Hadamard :

$$|\det(A)| \leq \prod_{i=1}^n \sqrt{\sum_{k=1}^n (a_{k,i})^2}.$$

Partie III

Dans cette partie, on utilise l'inégalité de Hadamard pour établir que l'inverse d'une fonction développable en série entière au voisinage de 0 non nulle à l'origine est encore développable en série entière au voisinage de 0.

Soit (a_n) une suite réelle telle que $a_0 \neq 0$.

10. Justifier l'existence d'une unique suite réelle (b_n) telle que $a_0b_0 = 1$ et $\forall n \geq 1, \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = 0$.

11. Pour $n \geq 1$, on considère la matrice A de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & \ddots & & & 0 \\ a_2 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & a_0 & 0 \\ a_n & \dots & & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}.$$

- a. Calculer le produit matriciel $A \times \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

- b. Justifier que $A \in GL_{n+1}(\mathbb{R})$.

- c. Appliquer les formules de Cramer pour en déduire que $b_n = \frac{\det(A')}{\det(A)}$ où A' est une matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ à préciser.

12. On suppose qu'il existe un réel r strictement positif tel que la série de terme général $|a_n|r^n$ converge. On pose $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|r^n = C$. Montrer que la série de terme général $(a_n)^2 r^{2n}$ converge et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n)^2 r^{2n} \leq C^2.$$

13. Utiliser alors l'expression de b_n et l'inégalité de Hadamard pour montrer que

$$\forall n \geq 1, |b_n| \leq \frac{1}{|a_0|\alpha^n}$$

où α est un réel positif indépendant de n à préciser (on pourra considérer la matrice A'' de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ obtenue à partir de A' en multipliant la i -ème ligne de A' par r^{i-1} , pour tout $i \in [1, n+1]$).

14. Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , développable en série entière sur $] -r, r[$ avec $r > 0$ telle que $f(0) = 0$. Montrer qu'il existe $r' > 0$ tel que $1/f$ soit encore développable en série entière sur $] -r', r'[$.