

DEVOIR SURVEILLÉ n° 6 (4H)

Exercice

On considère $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel euclidien des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels muni du produit scalaire canonique défini pour A et B matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par :

$$(A|B) = \text{trace}({}^tA \cdot B).$$

1. Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ sont deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, que vaut le réel $(A|A')$?
2. On note \mathcal{T} le sous-espace vectoriel formé des matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Donner, pour le produit scalaire canonique, une base orthonormée de \mathcal{T} et de son orthogonal \mathcal{T}^\perp .
3. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, déterminer le projeté orthogonal de la matrices A sur \mathcal{T} , ainsi que la distance de la matrice A à \mathcal{T} .

Problème

Dans tout ce problème, on note :

- $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R} ;
- E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, continues, telles que, pour tout $x > 0$ réel, la fonction $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ soit intégrable sur \mathbb{R}^+ ;
- F l'ensemble des fonctions continues et bornées sur \mathbb{R}^+ .

Pour tout f dans E , on appelle **transformée de Laplace** de f et on note $\mathcal{L}(f)$ la fonction définie pour tout $x > 0$ réel par :

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt.$$

1. Question préliminaire

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux.

Pour tout x dans $[a, +\infty[$, on pose : $F(x) = \int_a^x f(t) dt$.

On considère les propositions suivantes :

- (i) f est intégrable sur $[a, +\infty[$;
- (ii) F admet une limite finie en $+\infty$.

Donner, sans démonstration, toutes les implications possibles entre (i) et (ii) lorsque :

- (a) f est positive sur $[a, +\infty[$;
- (b) f n'est pas positive sur $[a, +\infty[$.

Partie I : Exemples et propriétés

2. (a) Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.
(b) Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E .
(c) Justifier que \mathcal{L} est une application linéaire de E dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$, espace vectoriel des applications de $]0, +\infty[$ dans \mathbb{R} .
3. (a) On considère $\mathcal{U} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\mathcal{U}(t) = 1$. Déterminer $\mathcal{L}(\mathcal{U})$.
(b) Soit $\lambda \geq 0$ réel. On considère $h_\lambda : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $t \geq 0$ réel par :

$$h_\lambda(t) = e^{-\lambda t}.$$

Démontrer que h_λ est dans E et déterminer $\mathcal{L}(h_\lambda)$.

4. Soient f dans E et n dans \mathbb{N} . On considère $g_n : t \mapsto t^n f(t)$ de $[0, +\infty[$ dans \mathbb{R} .
Pour $x > 0$, justifier l'existence de $A > 0$ tel que $t^n e^{-xt} \leq e^{-\frac{xt}{2}}$ pour tout $t \geq A$.
En déduire que g_n est un élément de E .

5. Transformée de Laplace d'une dérivée

Soit f dans E de classe \mathcal{C}^1 , croissante et bornée sur $[0, +\infty[$. Démontrer que f' est encore dans E et que l'on a :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0).$$

6. Régularité d'une transformée de Laplace

- (a) Démontrer que, pour tout f dans E , la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ et que l'on a : $\mathcal{L}(f)' = -\mathcal{L}(g_1)$ où g_1 est définie à la question 4.
(b) Démontrer que, pour tout f dans E , la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathcal{L}(f)^{(n)}(x)$ à l'aide d'une transformée de Laplace.

Partie II : Comportements asymptotiques de la transformée de Laplace

Dans toute cette partie, f est un élément de E

7. On suppose dans cette question que f est dans F .

(a) Déterminer la limite en $+\infty$ de $\mathcal{L}(f)$.

(b) *Théorème de la valeur initiale*

On suppose, de plus, que f est de classe \mathcal{C}^1 et croissante sur \mathbb{R}^+ , avec f' bornée sur \mathbb{R}^+ .
Démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x\mathcal{L}(f)(x) = f(0)$.

8. Théorème de la valeur finale

On suppose dans cette question que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = l$ où l est un réel. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs qui converge vers 0.

(a) Démontrer que f appartient à F .

(b) Soit n un entier naturel. Démontrer que $a_n \mathcal{L}(f)(a_n) = \int_0^{+\infty} h_n(x) dx$ où h_n est la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $h_n(x) = e^{-x} f\left(\frac{x}{a_n}\right)$.

(c) En déduire, à l'aide du théorème de convergence dominée, que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \mathcal{L}(f)(a_n) = l$.

(d) Lorsque $l \neq 0$, déterminer un équivalent de $\mathcal{L}(f)(x)$ en 0.

- 9.** Dans cette question, on suppose que f est intégrable sur \mathbb{R}^+ et on pose : $R(x) = \int_x^{+\infty} f(t)dt$ pour tout x dans $[0, +\infty[$.
- (a) Démontrer que R est une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, +\infty[$ et déterminer R' .
En déduire que, pour tout $x > 0$ réel, on a : $\mathcal{L}(f)(x) = R(0) - x\mathcal{L}(R)(x)$.
- (b) On fixe $\varepsilon > 0$.
Justifier de l'existence de A réel positif tel que pour tout $t \geq A$, on ait : $|R(t)| \leq \varepsilon$.
En déduire que, pour tout $x > 0$, on a :

$$|\mathcal{L}(f)(x) - R(0)| \leq x \int_0^A |R(t)|dt + \varepsilon.$$

- (c) Démontrer que $\mathcal{L}(f)$ se prolonge par continuité en 0 (on précisera la valeur en 0 de ce prolongement).

Partie III : Application

10. Calcul de l'intégrale de Dirichlet

Ici, f est la fonction définie par : $f(0) = 1$ et $f(t) = \frac{\sin(t)}{t}$ pour $t > 0$ réel.

- (a) Démontrer que la fonction $F : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ admet une limite finie réelle l en $+\infty$.
- (b) En considérant la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ où $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |f(t)|dt$, démontrer que f n'est pas intégrable sur \mathbb{R}^+ .
- (c) Soit $x > 0$. Démontrer, en détaillant les calculs, que, pour tout $X > 0$, on a :

$$\int_0^X \sin(t) e^{-xt} dt = -\frac{1}{1+x^2} (e^{-xX}(x \sin(X) + \cos(X)) - 1).$$

Démontrer que la fonction $t \mapsto \sin(t) e^{-xt}$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ .

Déterminer alors $\int_0^{+\infty} \sin(t) e^{-xt} dt$.

- (d) Déterminer, pour $x > 0$, une expression simple de $\mathcal{L}(f)(x)$ et en déduire l .
Pour cela, on pourra utiliser le résultat suivant (la démarche de la preuve étant identique à celle de la question 9) : lorsque f dans E vérifie : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t)dt = l \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{x \rightarrow 0} \mathcal{L}(f)(x) = l$.
On notera que, par rapport à la question 9, on a remplacé l'hypothèse " f intégrable sur \mathbb{R}^+ " par l'hypothèse " $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t)dt = l \in \mathbb{R}$ ".

DEVOIR SURVEILLÉ n° 5 (4H)

- Dans le problème, λ désigne *toujours* une application continue de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}^+ , croissante et non majorée.
- Dans le problème, f désigne *toujours* une application continue de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R} .
- On note E l'ensemble des réels x pour lesquels l'application $t \mapsto f(t)e^{-\lambda(t)x}$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ .
- On note E' l'ensemble des réels x pour lesquels l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-\lambda(t)x} dt$ converge.

On se propose ci-après d'étudier la transformation $f \mapsto Lf$ définien en I.A, d'en établir quelques propriétés, d'examiner certains exemples et d'utiliser la transformation L pour l'étude d'un opérateur.

Préliminaires, définition de la transformation L .

I.A. Quelle inclusion existe-t-il entre les ensembles E et E' ?

Désormais, pour $x \in E'$, on notera

$$Lf(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-\lambda(t)x} dt$$

I.B. Montrer que si E n'est pas vide, alors E est un intervalle non majoré de \mathbb{R} .

I.C. Montrer que si E n'est pas vide, alors Lf est continue sur E .

Exemples dans le cas de f positive.

II.A. Comparer E et E' dans le cas où f est positive.

II.B. Dans les trois cas suivants, déterminer E .

II.B.1) $f(t) = \lambda'(t)$ avec λ supposée de classe C^1 .

II.B.2) $f(t) = e^{t\lambda(t)}$.

II.B.3) $f(t) = \frac{e^{-t\lambda(t)}}{1+t^2}$.

II.C. Dans cette question, on étudie le cas $\lambda(t) = t^2$ et $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

II.C.1) Déterminer E . Que vaut $Lf(0)$?

II.C.2) Prouver que Lf est dérivable sur \mathbb{R}^{+*} .

II.C.3) Montrer l'existence d'une constante $A > 0$ telle que pour tout $x > 0$, on ait

$$Lf(x) - (Lf)'(x) = \frac{A}{\sqrt{x}}$$

II.C.4) On note $g(x) = e^{-x}Lf(x)$ pour $x \geq 0$. Montrer que

$$\forall x \geq 0, g(x) = \frac{\pi}{2} - A \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$$

II.C.5) En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

Etude d'un premier exemple.

Dans cette partie, $\lambda(t) = t$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et $f(t) = \frac{t}{e^t - 1} - 1 + \frac{t}{2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}^{+*}$.

III.A. Montrer que f se prolonge par continuité en 0. On note encore f le prolongement obtenu.

III.B. Déterminer E .

III.C. A l'aide d'un développement en série, montrer que pour tout $x > 0$, on a

$$Lf(x) = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$$

III.D. Est-ce que $Lf(x) - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x}$ admet une limite finie en 0^+ ?

Généralités dans le cas typique.

Dans cette partie, $\lambda(t) = t$ pour $t \in \mathbb{R}^+$.

IV.A. Montrer que si E n'est pas vide et si α est sa borne inférieure (on convient que $\alpha = -\infty$ si $E = \mathbb{R}$) alors Lf est de classe C^∞ sur $] \alpha, +\infty[$ et exprimer ses dérivées successives à l'aide d'une intégrale.

IV.B. Dans le cas particulier où $f(t) = e^{-at}t^n$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$, expliciter E , E' et calculer $Lf(x)$ pour $x \in E'$.

IV.C. Comportement en l'infini.

On suppose ici que E n'est pas vide et que f admet au voisinage de 0 le développement limité d'ordre $n \in \mathbb{N}$ suivant :

$$f(t) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} t^k + O(t^{n+1})$$

IV.C.1) Montrer que pour tout $\beta > 0$, on a, lorsque x tend vers $+\infty$, le développement asymptotique suivant :

$$\int_0^\beta \left(f(t) - \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} t^k \right) e^{-tx} dt = O(x^{-n-2})$$

IV.C.2) En déduire que lorsque x tend vers $+\infty$, on a le développement asymptotique :

$$Lf(x) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{x^{k+1}} + O(x^{-n-2})$$

IV.D. Comportement en 0.

On suppose ici que f admet une limite finie ℓ en $+\infty$.

IV.D.1) Montrer que E contient \mathbb{R}^{+*} .

IV.D.2) Montrer que $xLf(x)$ tend vers ℓ en 0^+ .

Etude d'un deuxième exemple.

Dans cette partie, $\lambda(t) = t$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et $f(t) = \frac{\sin(t)}{t}$ pour tout $t > 0$, f étant prolongée par continuité en 0.

V.A. Montrer que E ne contient pas 0.

V.B. Montrer que $E =]0, +\infty[$.

V.C. Montrer que E' contient 0.

V.D. Calculer $(Lf)'(x)$ pour $x \in E$.

V.E. En déduire $(Lf)(x)$ pour $x \in E$.

- V.F.** On note pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \geq 0$, $f_n(x) = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx} dt$. Montrer que $\sum (f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.
- V.G.** Que vaut $Lf(0)$?

Injectivité dans le cas typique.

Dans cette partie, $\lambda(t) = t$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

VI.A. Soit g une application continue de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} . On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\int_0^1 t^n g(t) dt = 0$$

VI.A.1) Que dire de $\int_0^1 P(t)g(t) dt$ pour $P \in \mathbb{R}[X]$?

VI.A.2) En déduire que g est l'application nulle.

VI.B. Soient f fixée telle que E soit non vide, $x \in E$ et $a > 0$. On pose $h(t) = \int_0^t e^{-xu} f(u) du$ pour tout $t \geq 0$.

VI.B.1) Montrer que $Lf(x+a) = a \int_0^{+\infty} e^{-at} h(t) dt$.

VI.B.2) On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $Lf(x+na) = 0$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^1 u^n h\left(-\frac{\ln(u)}{a}\right) du$ converge et qu'elle est nulle.

VI.B.3) Qu'en déduit-on pour la fonction h ?

VI.C. Montrer que l'application qui à f associe Lf est injective.

Etude en la borne inférieure de E .

VII.A. Cas positif.

On suppose que f est positive et que E n'est ni vide ni égal à \mathbb{R} . On note α sa borne inférieure.

VII.A.1) Montrer que si Lf est bornée sur E , alors $\alpha \in E$.

VII.A.2) Si $\alpha \notin E$, que dire de $Lf(x)$ quand x tend vers α^+ ?

VII.B. Dans cette question, $f(t) = \cos(t)$ et $\lambda(t) = \ln(1+t)$.

VII.B.1) Déterminer E .

VII.B.2) Déterminer E' .

VII.B.3) Montrer que Lf admet une limite en α , borne inférieure de E , et la déterminer.

Une utilisation de la transformation L .

Dans cette partie, \mathcal{P} désigne l'ensemble des fonctions polynomiales à coefficients réels et on utilise la transformation L appliqué à des éléments de \mathcal{P} pour l'étude d'un opérateur U .

VIII.A. Soient P, Q deux éléments de \mathcal{P} . Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$ converge.

VIII.B. Pour tout couple $(P, Q) \in \mathcal{P}^2$, on note

$$(P, Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$$

Vérifier que (\cdot, \cdot) définit un produit scalaire sur \mathcal{P} .

VIII.C. On note D l'endomorphisme de dérivation et U l'endomorphisme de \mathcal{P} défini par

$$U(P)(t) = e^t D(te^{-t} P'(t))$$

Vérifier que U est endomorphisme de \mathcal{P} .

VIII.D. Montrer que pour tous P, Q de \mathcal{P} on a

$$(U(P), Q) = (P, U(Q))$$

VIII.E. Montrer que U admet des valeurs propres dans \mathbb{C} , qu'elles sont réelles et que deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

VIII.F. Soient λ une valeur propre de U et P un vecteur propre associé.

VIII.F.1) Montrer que P est solution d'une équation différentielle linéaire simple que l'on précisera.

VIII.F.2) Quel lien y-a-t-il entre λ et le degré de P ?

VIII.G. Description des éléments propres de U .

On considère sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$(E_n) : tP'' + (1-t)P' + nP = 0$$

avec $n \in \mathbb{N}$ et d'inconnue $P \in \mathcal{P}$.

VIII.G.1) En appliquant la transformation L avec $\lambda(t) = t$ à (E_n) , montrer que si P est solution de (E_n) sur $]0, +\infty[$, alors son image Q par L est solution d'une équation différentielle (E'_n) d'ordre 1 sur $]1, +\infty[$.

VIII.G.2) Résoudre l'équation (E'_n) sur $]1, +\infty[$ et en déduire les valeurs et vecteurs propres de l'endomorphisme U .

VIII.G.3) Quel est le lien entre ce qui précède et les fonctions polynomiales définies pour $n \in \mathbb{N}$ par $P_n(t) = e^t D^n(e^{-t} t^n)$?

Centrale PSI 1

Un corrigé

Préliminaires, définition de la transformation L .

I.A. L'intégrabilité entraîne la convergence de l'intégrale et on a donc

$$E \subset E'$$

I.B. Si $x \in E$ alors $\forall y \geq x, \forall t \in \mathbb{R}^+, |f(t)e^{-\lambda(t)y}| \leq |f(t)|e^{-\lambda(t)x}$ (car $\lambda(t) \geq 0$) et, le majorant étant intégrable sur \mathbb{R}^+ , on a $y \in E$. On vient donc de voir que

$$\forall x \in E, [x, +\infty[\subset E$$

On suppose désormais E non vide et on distingue deux cas.

- Si E n'est pas minoré; pour tout réel y il existe $x \in E$ tel que $x \leq y$ et ce qui précède indique que $y \in E$. On a donc

$$E = \mathbb{R}$$

- Si E est minoré, étant non vide il possède une borne inférieure α et $E \subset [\alpha, +\infty[$. Par ailleurs, si $y > \alpha$ alors (caractérisation de la borne inférieure) il existe $x \in E$ tel que $x \leq y$ et ainsi $y \in E$. On a prouvé que

$$] \alpha, +\infty[\subset E \subset [\alpha, +\infty[$$

et E est égal à l'un des intervalles $] \alpha, +\infty[$ ou $[\alpha, +\infty[$.

I.C. Il s'agit d'utiliser le théorème de continuité des intégrales à paramètres.

- $\forall x \in E, t \mapsto f(t)e^{-\lambda(t)x}$ est continue sur \mathbb{R}^+ .

- $\forall t \geq 0, x \mapsto f(t)e^{-\lambda(t)x}$ est continue sur E .

- $\forall [a, b] \subset E, \forall x \in [a, b], \forall t \geq 0, |f(t)e^{-\lambda(t)x}| \leq |f(t)|e^{-\lambda(t)a}$. Le majorant est indépendant de x et est intégrable sur \mathbb{R}^+ .

Le théorème s'applique et donne

$$Lf \in \mathcal{C}^0(E)$$

Exemples dans le cas de f positive.

II.A. L'intégrabilité de g sur I correspondant à la convergence de l'intégrale de $|g|$ sur I , si f est positive alors $E = E'$.

II.B. Dans les trois cas proposés, la fonction f est positive (en B.1) cela découle de la croissance supposée de λ). On peut donc indifféremment étudier la convergence de l'intégrale (i.e. l'existence d'une limite de $\int_0^a f(t)e^{-\lambda(t)x} dt$ quand $a \rightarrow +\infty$) ou l'intégrabilité (au voisinage de $+\infty$ car les fonctions sont continues sur \mathbb{R}^+ et $+\infty$ est donc le seule problème).

II.B.1) Soit $a \in \mathbb{R}^+$. On a

$$\forall x \neq 0, \int_0^a \lambda'(t)e^{-\lambda(t)x} dt = \left[-\frac{1}{x} e^{-\lambda(t)x} \right]_{t=0}^{t=a} = \frac{e^{-\lambda(0)x} - e^{-\lambda(a)x}}{x}$$

λ étant croissante et non majorée tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et ainsi

$$\forall x > 0, \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \lambda'(t)e^{-\lambda(t)x} dt = \frac{e^{-\lambda(0)x}}{x}$$

$$\forall x < 0, \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \lambda'(t)e^{-\lambda(t)x} dt = +\infty$$

Enfin (cas $x = 0$) $\int_0^a \lambda'(t) dt = \lambda(a) - \lambda(0) \rightarrow +\infty$ quand $a \rightarrow +\infty$. On a donc montré que

$$E = E' = \mathbb{R}^{+*} \text{ et } \forall x > 0, Lf(x) = \frac{e^{-\lambda(0)x}}{x}$$

II.B.2) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $\forall t \geq \max(x, 0)$, $f(t)e^{-\lambda(t)x} = e^{\lambda(t)(t-x)} \geq 1$. On n'a donc pas intégrabilité au voisinage de $+\infty$ et

$$E = \emptyset$$

II.B.3) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $\forall t \geq \max(-x, 0)$, $0 \leq f(t)e^{-\lambda(t)x} = \frac{e^{-\lambda(t)(x+t)}}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}$. Le majorant étant intégrable, on a $x \in E$. Ainsi

$$E = E' = \mathbb{R}$$

II.C. Il s'agit d'étudier la fonction $x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$.

II.C.1) Si $x \geq 0$ alors $0 \leq \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}$ qui est intégrable sur \mathbb{R}^+ . On a donc $x \in E$.

Si $x < 0$, $t \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow +\infty$ (croissances comparées) et $t \mapsto \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$ n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$ (comparaison à la fonction de Riemann $t \mapsto 1/t$) et $x \notin E$. On a donc

$$E = \mathbb{R}^+$$

On a immédiatement (arctan étant une primitive de $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ sur \mathbb{R})

$$Lf(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$$

II.C.2) Il s'agit d'utiliser le théorème de régularité des intégrales à paramètres.

- $\forall x > 0, \forall t \geq 0, t \mapsto \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ .
- $\forall t \geq 0, x \mapsto \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$ est de classe C^1 sur \mathbb{R}^{+*} de dérivée $x \mapsto -\frac{t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2}$.
- $\forall x > 0, t \mapsto -\frac{t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2}$ est continue sur \mathbb{R}^+ .
- On a

$$\forall a > 0, \forall x \geq a, \forall t \geq 0, \left| -\frac{t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2} \right| \leq \frac{t^2}{1+t^2} e^{-at^2} = \psi(t)$$

ψ est continue sur \mathbb{R}^+ et négligeable devant $1/t^2$ au voisinage de $+\infty$ (car $a > 0$); c'est donc une fonction intégrable sur \mathbb{R}^+ .

Le cours indique alors que Lf est de classe C^1 sur \mathbb{R}^{+*} avec

$$\forall x > 0, (Lf)'(x) = - \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^2} e^{-xt^2} dt$$

Remarque : on ne sait rien quant à la dérivabilité en 0 et on ne s'en occupera que si cela s'avère utile dans la suite.

II.C.3) On en déduit que

$$\forall x > 0, Lf(x) - (Lf)'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt = \frac{A}{\sqrt{x}} \text{ avec } A = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

la dernière égalité provenant du changement de variable $u = t\sqrt{x}$.

Remarque : Lf étant continue en 0, on a donc $(Lf)'(x) \rightarrow -\infty$ quand $x \rightarrow 0^+$. Par théorème de limite de la dérivée (avec $Lf \in C^0(\mathbb{R}^+) \cap C^1(\mathbb{R}^{+})$), on peut en déduire que Lf n'est PAS dérivable en 0 mais que son graphe présente en $(0, \pi/2)$ une demi-tangente verticale.*

II.C.4) g est dérivable sur \mathbb{R}^{+*} et

$$\forall x > 0, g'(x) = e^{-x}((Lf)'(x) - Lf(x)) = -A \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$$

$x \mapsto \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$ est continue sur \mathbb{R}^{+*} et le théorème fondamental indique que $x \mapsto \int_1^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$ en est une primitive sur \mathbb{R} . Deux primitives sur un intervalle diffèrent d'une constante,

$$\exists c \in \mathbb{R} / \forall x > 0, g(x) = c - A \int_1^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$$

Par ailleurs, g est continue en 0 (Lf l'est) et $g(x) \rightarrow g(0) = \frac{\pi}{2}$ quand $x \rightarrow 0$. On en déduit que l'on peut passer à la limite dans l'égalité ci-dessus (en particulier, l'intégrale existe sur $[0, 1]$ ce qui n'est pas surprenant car la fonction que l'on intègre est prolongeable par continuité en 0). On obtient $c = \frac{\pi}{2} + A \int_1^0 \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$. Finalement, on a

$$\forall x > 0, g(x) = \frac{\pi}{2} - A \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$$

et l'égalité reste vraie en $x = 0$ (elle se lit $g(0) = \pi/2$).

II.C.5) Remarquons que

$$\forall x \geq 0, 0 \leq g(x) \leq e^{-x} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

En faisant tendre x vers $+\infty$ dans l'identité de la question précédente, on obtient donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} A \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \frac{\pi}{2}$$

Par ailleurs, le changement de variable $u = \sqrt{t}$ (licite car $t \mapsto \sqrt{t}$ est un C^1 difféomorphisme de $]0, x[$ dans $]0, \sqrt{x}[$) donne

$$\forall x > 0, \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = 2 \int_0^{\sqrt{x}} e^{-u^2} du$$

Cette quantité tend vers $2A$ quand $x \rightarrow +\infty$ et finalement, $2A^2 = \frac{\pi}{2}$ ou encore (comme $A \geq 0$)

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = A = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Etude d'un premier exemple.

III.A. Comme $e^t - 1 \sim_0 t$, on a $f(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0^+$. f est donc prolongeable par continuité en posant

$$f(0) = 0$$

III.B. Soit $x \in \mathbb{R}$; $g : t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est continue sur \mathbb{R}^+ et $g(t) \sim \frac{t}{2}e^{-xt}$ en $+\infty$ (car $f(t) \sim_{+\infty} t/2$). Si $x > 0$, g est intégrable au voisinage de $+\infty$ (négligeable devant $1/t^2$). Si $x \leq 0$, g est non intégrable au voisinage de $+\infty$ (de limite infinie). Ainsi

$$E = \mathbb{R}^{+*}$$

III.C. Par définition, on a

$$\forall x > 0, Lf(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt$$

Par ailleurs, pour $t > 0$ on a $e^{-t} \in [0, 1[$ et donc

$$\forall t > 0, f(t) = te^{-t} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-kt} - 1 + \frac{t}{2}$$

Les fonctions $t \mapsto e^{-xt}$ et $t \mapsto te^{-xt}$ étant intégrables sur \mathbb{R}^+ pour $x > 0$, on peut découper $Lf(x)$ en trois morceaux pour $x > 0$ et obtenir

$$\forall x > 0, Lf(x) = \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} te^{-(k+1+x)t} dt - \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} te^{-xt} dt$$

Pour $y > 0$, une intégration par parties donne $\int_0^a te^{-yt} dt = \left[-\frac{t}{y}e^{-yt}\right]_0^a + \frac{1}{y} \int_0^a e^{-yt} dt = \frac{-aye^{-ya} + 1 - e^{-ay}}{y^2}$. En faisant tendre a vers $+\infty$, on trouve alors

$$\forall y > 0, \int_0^{+\infty} te^{-ay} dt = \frac{1}{y^2}$$

et ainsi

$$\forall x > 0, Lf(x) = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} te^{-(k+1+x)t} dt$$

On veut maintenant intervertir somme et intégrale par le théorème d'intégration terme à terme. On travaille pour un $x > 0$ fixé.

- Posons $f_k : t \mapsto te^{-(k+1+x)t}$... f_k est continue pour tout $k \geq 0$ et $\sum(f_k)$ converge simplement sur \mathbb{R}^{+*} de somme $t \mapsto \frac{t}{e^t - 1} e^{-xt}$ qui est aussi continue sur \mathbb{R}^{+*} .
- Les f_k sont intégrables sur \mathbb{R}^+ et $\int_0^{+\infty} |f_k| = \frac{1}{(k+1+x)^2}$ est le terme général d'une série convergente.

Le théorème s'applique et le calcul d'intégrale fait plus haut donne

$$\forall x > 0, Lf(x) = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+x+1)^2}$$

C'est la formule voulue (il suffit de poser $n = k + 1$).

III.D. On vient de voir que

$$\forall x > 0, Lf(x) - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$$

- Posons $h_n : x \mapsto \frac{1}{(n+x)^2}$. On a $\|h_n\|_{\infty, \mathbb{R}^+} \leq \frac{1}{n^2}$ qui est le terme général d'une série convergente. Ainsi, $\sum(h_n)$ converge normalement sur \mathbb{R}^+ .
- Les h_n sont continues sur \mathbb{R}^+ .

Le cours indique que la somme de la série $\sum(h_n)$ est continue sur \mathbb{R}^+ . En particulier,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} Lf(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Généralités dans le cas typique.

IV.A. Il s'agit d'utiliser le théorème de régularité des intégrales à paramètres.

- Pour tout $x > \alpha$ (et donc $x \in E$) $t \mapsto e^{-xt} f(t)$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ .
- Pour tout $t \geq 0$, $x \mapsto e^{-xt} f(t)$ est de classe C^∞ sur $] \alpha, +\infty[$ de dérivée n -ième $x \mapsto (-t)^n e^{-xt} f(t)$.
- Pour tout $x > \alpha$, $t \mapsto (-t)^n e^{-xt} f(t)$ est continue sur \mathbb{R}^+ .
- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $[a, b] \subset] \alpha, +\infty[$. On a

$$\forall x \in [a, b], \forall t \geq 0, |(-t)^n e^{-xt} f(t)| \leq t^n e^{-at} |f(t)| = \phi_n(t)$$

ϕ_n est continue sur \mathbb{R}^+ et présente un unique problème d'intégrabilité en $+\infty$. Comme $a > \alpha = \inf(E)$, il existe $c \in E$ tel que $a > c$ (caractérisation de la borne inférieure). On a alors, au voisinage de $+\infty$, $\phi_n(t) = e^{-ct} |f(t)| t^n e^{-(a-c)t} = o(e^{-ct} f(t))$ (car $a - c > 0$). Comme $c \in E$, $t \mapsto e^{-ct} f(t)$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ (sur \mathbb{R}^+). Ainsi, ϕ_n est intégrable au voisinage de $+\infty$ elle aussi et donc elle l'est sur \mathbb{R}^+ .

Le théorème s'applique. Il indique que $Lf \in C^\infty(] \alpha, +\infty[)$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x > \alpha, (Lf)^n(x) = (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n f(t) e^{-xt} dt$$

IV.B. Comme f est positive, on a $E = E'$. Il s'agit de trouver les $x \in \mathbb{R}$ tel que $\int_0^{+\infty} t^n e^{-(x+a)t} dt$ converge (le seul problème étant celui au voisinage de $+\infty$) ou tels que $t \mapsto t^n e^{-(x+a)t}$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ (idem). Si $x+a > 0$ alors $t^n e^{-(x+a)t} = o(1/t^2)$ au voisinage de $+\infty$ (croissances comparées) et la fonction est intégrable au voisinage de $+\infty$. Si $x+a \leq 0$ alors $t^n e^{-(x+a)t} \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow +\infty$ et la fonction n'est donc pas intégrable au voisinage de $+\infty$. Finalement ;

$$E = E' =] -a, +\infty[$$

Pour $y > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, une intégration par parties donne (en omettant les détails de calcul) $\int_0^{+\infty} t^n e^{-yt} dt = \frac{n}{y} \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-yt} dt$. On en déduit par récurrence simple que

$$\forall y > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{+\infty} t^n e^{-yt} dt = \frac{n!}{y^{n+1}}$$

En particulier, on a

$$\forall x > -a, Lf(x) = \frac{n!}{(x+a)^{n+1}}$$

IV.C.1) On fixe $\beta > 0$. Posons $g : t \mapsto f(t) - \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} t^k$. On sait qu'au voisinage de 0 on a $g(t) = O(t^{n+1})$. Il existe donc $M \in \mathbb{R}^+$ et $c \in]0, \beta[$ tel que

$$\forall t \in [0, c], |g(t)| \leq Mt^{n+1}$$

La relation de Chasles, l'inégalité triangulaire et la croissance du passage à l'intégrale donnent

$$\left| \int_0^\beta g(t) e^{-tx} dt \right| \leq \int_0^c |g(t)| e^{-tx} dt + \|g\|_{\infty, [c, \beta]} \int_c^\beta e^{-xt} dt \leq M \int_0^c t^{n+1} e^{-tx} dt + \|g\|_{\infty, [c, \beta]} (\beta - c) e^{-cx}$$

Le calcul de IV.B indique alors que

$$\left| \int_0^\beta g(t) e^{-tx} dt \right| \leq \frac{M(n+1)!}{x^{n+2}} + \|g\|_{\infty, [c, \beta]} (\beta - c) e^{-cx} = O_{x \rightarrow +\infty}(x^{-n-2})$$

ce qui correspond au résultat demandé.

IV.C.2) Avec le calcul de IV.B on a (en continuant à utiliser la fonction g introduite en IV.C.1)

$$\forall x \in E \cap \mathbb{R}^{+*}, Lf(x) - \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{x^{k+1}} = \int_0^{+\infty} g(t)e^{-tx} dt$$

La question précédente donne un renseignement pour l'intégrale entre 0 et 1. Intéressons-nous à l'autre partie. Fixons $c \in E \cap \mathbb{R}^{+*}$ (c existe car E est non majoré), travaillons avec $x \geq c+1$ et écrivons que

$$\forall t \geq 1, |g(t)e^{-tx}| = |g(t)e^{-ct}e^{-(x-c)t}| \leq |g(t)e^{-ct}|e^{-(x-c)}$$

$t \mapsto g(t)e^{-ct}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (car $c \in E$ donc $t \mapsto f(t)e^{-ct}$ est intégrable et $c > 0$ donc pour tout k , $t \mapsto t^k e^{-ct}$ est aussi intégrable sur \mathbb{R}^+). On a alors

$$\left| \int_1^{+\infty} g(t)e^{-xt} dt \right| \leq e^{-(x-c)} \int_1^{+\infty} |g(t)|e^{-ct} dt$$

et cet terme est dominé par (et même négligeable devant) x^{-n-2} quand $x \rightarrow +\infty$. En sommant, on a alors

$$\int_0^{+\infty} \left(f(t) - \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} t^k \right) e^{-tx} dt = O(x^{-n-2})$$

et le calcul de IV.B donne

$$Lf(x) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{x^{k+1}} + O(x^{-n-2})$$

IV.D.1) f est continue sur \mathbb{R}^+ et admet une limite en $+\infty$ et elle est donc bornée sur \mathbb{R}^+ (majorée en module par $|\ell| + 1$ au voisinage de $+\infty$ et continue sur le segment qui reste). Soit $x > 0$; $|f(t)e^{-xt}| \leq \|f\|_{\infty, \mathbb{R}^+} e^{-xt}$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ et donc $x \in E$. Ainsi

$$\mathbb{R}^{+*} \subset E$$

IV.D.2) On a

$$\forall x > 0, xLf(x) = \int_0^{+\infty} xf(t)e^{-xt} dt$$

Le changement de variable $u = xt$ donne

$$\forall x > 0, xLf(x) = \int_0^{+\infty} f(u/x)e^{-u} du = G(x)$$

Pour étudier le comportement de G en $+\infty$, on va utiliser la caractérisation séquentielle. On se donne ainsi une suite (x_n) d'éléments de $]0, 1]$ telle que $x_n \rightarrow 0$ et on veut montrer que $G(x_n) \rightarrow \ell$. Pour cela, on utilise le théorème de convergence dominée.

- Posons $g_n : u \mapsto f(u/x_n)e^{-u}$. (g_n) est une suite de fonctions continues qui converge simplement sur \mathbb{R}^{+*} vers la fonction constante $u \mapsto \ell$ elle même continue sur \mathbb{R}^+ .
- $\forall n \in \mathbb{N}, \forall u \geq 0, |g_n(u)| \leq \|f\|_{\infty} e^{-u}$ et le majorant est intégrable sur \mathbb{R}^+ .

Le théorème s'applique et indique que $G(x_n) \rightarrow \int_0^{+\infty} \ell e^{-u} du = \ell$. On obtient la même limite pour toutes les suites (x_n) et ainsi (caractérisation séquentielle des limites)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} xLf(x) = \ell$$

Etude d'un deuxième exemple.

V.A. Il s'agit de montrer que f n'est pas intégrable sur \mathbb{R}^+ ou encore que $F(a) = \int_0^a |f|$ n'admet pas de limite infinie quand $a \rightarrow +\infty$. On remarque que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |f(t)| dt \geq \int_{n\pi+\pi/4}^{(n+1)\pi-\pi/4} \frac{dt}{\sqrt{2t}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}(n+1)\pi} \frac{\pi}{2}$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, F((n+1)\pi) \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

F n'est donc pas bornée sur \mathbb{R}^+ et

$$0 \notin E$$

V.B. Avec la partie préliminaire, on en déduit que $E \subset]0, +\infty[$. Réciproquement, si $x > 0$ alors $f(t)e^{-xt} = o(1/t^2)$ au voisinage de $+\infty$ et donc $x \in E$. Ainsi

$$E =]0, +\infty[$$

V.C. Le seul problème dans l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ est celui au voisinage de $+\infty$. On a

$$\forall a \geq 1, \int_1^a \frac{\sin(t)}{t} dt = \left[-\frac{\cos(t)}{t} \right]_1^a + \int_1^a \frac{\cos(t)}{t^2} dt$$

Le terme "tout intégré" du membre de droite admet une limite quand $a \rightarrow +\infty$. $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ (majorée en module par $1/t^2$) et l'intégrale du membre de droite admet donc une limite quand $a \rightarrow +\infty$. Il en est finalement de même de l'intégrale du membre de gauche. L'intégrale de $\frac{\sin(t)}{t}$ existe donc aussi au voisinage de $+\infty$. On a finalement existence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ et

$$0 \in E'$$

V.D. Il convient encore d'utiliser le théorème de régularité des intégrales à paramètres.

- $\forall x > 0, t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ (car $x \in E$).
 - $\forall t > 0, x \mapsto f(t)e^{-xt}$ est de classe C^1 sur \mathbb{R}^{+*} de dérivée $x \mapsto -\sin(t)e^{-xt}$.
 - $\forall x > 0, t \mapsto -\sin(t)e^{-xt}$ est continue sur \mathbb{R}^+ .
 - $\forall a > 0, \forall x \geq a, \forall t \geq 0, |-\sin(t)e^{-xt}| \leq e^{-at}$ qui est intégrable sur \mathbb{R}^+ .
- Ainsi, $Lf \in C^1(\mathbb{R}^{+*})$ et

$$\forall x > 0 (Lf)'(x) = - \int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-xt} dt = -\frac{1}{1+x^2}$$

le calcul de l'intégrale se faisant, par exemple, en interprétant le sinus comme partie imaginaire de e^{it} .

V.E. Deux primitives d'une fonction sur un intervalle différant d'une constante,

$$\exists c \in \mathbb{R} / \forall x > 0, Lf(x) = c - \arctan(x)$$

f étant bornée sur \mathbb{R}^+ (continue et de limite nulle en l'infini) on a $|Lf(x)| \leq \|f\|_\infty \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{\|f\|_\infty}{x} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$. On en déduit que $c = \pi/2$ et

$$\forall x > 0, f(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$$

V.F. Soit $x \geq 0$ (et donc $x \in E'$). Le changement de variable $u = x - n\pi$ donne

$$f_n(x) = (-1)^n e^{-n\pi x} \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u + n\pi} e^{-ux} dx$$

On remarque que $(f_n(x))$ est une suite alternée, de limite nulle (car $x \in E'$) et que $(|f_n(x)|)$ décroît (c'est le cas des suites positives de terme généraux $e^{-n\pi x}$ et $\int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u + n\pi} e^{-ux} dx$). On peut alors appliquer la règle spéciale pour affirmer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| \sum_{k \geq n+1} f_k(x) \right| \leq |f_{n+1}(x)| \leq \int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} \frac{dt}{t} = \ln \left(\frac{n+2}{n+1} \right)$$

et on a donc

$$\left\| \sum_{k \geq n+1} f_k \right\|_{\infty, \mathbb{R}^+} \leq \ln \left(\frac{n+2}{n+1} \right) \rightarrow 0$$

ce qui montre que $\sum(f_k)$ converge uniformément sur \mathbb{R}^+ .

V.G. On peut ainsi utiliser le théorème de double limite pour affirmer que

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{x \rightarrow 0} Lf(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(0) = Lf(0)$$

Injectivité dans le cas typique.

VI.A.1) Par linéarité du passage à l'intégrale, on a

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \int_0^1 P(t)g(t) dt = 0$$

VI.A.2) D'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite (P_n) d'éléments de $\mathbb{R}[X]$ telle que $\|P_n - g\|_{\infty, [0,1]} \rightarrow 0$. On a alors

$$\left| \int_0^1 P_n g - \int_0^1 g^2 \right| \leq \|P_n - g\|_{\infty, [0,1]} \int_0^1 |g| \rightarrow 0$$

et comme $\int_0^1 P_n g$ est toujours nul,

$$\int_0^1 g^2 = 0$$

g^2 étant continue et positive sur $[0, 1]$ ceci entraîne que

$$\forall t \in [0, 1], g(t) = 0$$

VI.B.1) $u \mapsto e^{-xu} f(u)$ étant continue sur \mathbb{R}^+ , le théorème fondamental indique que h est une primitive de cette fonction sur \mathbb{R}^+ . Une intégration par partie donne alors

$$\forall b > 0, \int_0^b f(t)e^{-(x+a)t} dt = [h(t)e^{-at}]_0^b + a \int_0^b e^{-at} h(t) dt$$

Le membre de gauche admet une limite (égale à $Lf(x+a)$) quand $b \rightarrow +\infty$ (car $x+a \in E$). On a donc

$$Lf(x+a) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(h(b)e^{-ab} + a \int_0^b e^{-at} h(t) dt \right)$$

Par ailleurs, h admet une limite finie en $+\infty$ (car $x \in E \subset E'$) et $e^{-ab} \rightarrow 0$ quand $b \rightarrow +\infty$ (car $a > 0$). Ainsi,

$$L(fx + a) = \lim_{b \rightarrow +\infty} a \int_0^b e^{-at} h(t) dt = a \int_0^{+\infty} e^{-at} h(t) dt$$

l'existence de l'intégrale étant conséquence de l'existence des autres limites.

VI.B.2) $t \mapsto e^{-at}$ est un C^1 difféomorphisme de \mathbb{R}^{+*} dans $]0, 1[$. On peut ainsi poser $u = e^{-ta}$ pour obtenir (ce qui inclut l'existence de l'intégrale du membre de droite)

$$a \int_0^{+\infty} e^{-t(n+1)a} h(t) dt = \int_0^1 u^n h\left(-\frac{\ln(u)}{a}\right) du$$

Par ailleurs le membre de gauche vaut $\frac{1}{n+1} Lf(x + (n+1)a)$ et est nul d'après la question précédente. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 u^n h\left(-\frac{\ln(u)}{a}\right) du = 0$$

VI.B.3) La fonction $g : u \mapsto h\left(-\frac{\ln(u)}{a}\right)$ est continue sur $]0, 1[$ et prolongeable par continuité en 0 (car h admet une limite finie en $+\infty$ car $x \in E$). Avec les question VI.B.2) et VI.A.2), on en déduit que g est nulle. Quand u varie dans $[0, 1]$, $-\frac{\ln(u)}{a}$ varie dans \mathbb{R}^+ et h est donc nulle sur \mathbb{R}^+ .

VI.C. Soit f telle que E est non vide. Supposons que $Lf = 0$; la question précédente indique que $\forall x \in E$, une primitive de $u \mapsto e^{-xu} f(u)$ est nulle sur \mathbb{R}^+ . Pour tout x de E , $u \mapsto e^{-xu} f(u)$ est donc nulle sur \mathbb{R}^+ . Comme E non vide (et comme \exp ne s'annule pas sur \mathbb{R}) f est donc nulle sur \mathbb{R}^+ .

Le noyau de l'application linéaire L est donc réduit à $\{0\}$ et L est injective.

Etude en la borne inférieure de E .

VII.A. Comme f est positive, on a $E = E'$ mais aussi Lf qui est décroissante sur E ($\forall x, y \in E$ tels que $x \leq y$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$ on a $f(t)e^{-\lambda(t)x} \geq f(t)e^{-\lambda(t)y}$ et donc $Lf(x) \geq Lf(y)$). En particulier, par théorème de limite monotone, Lf admet des limites aux bornes de l'intervalle E (éventuellement $+\infty$ en la borne inférieure si la fonction n'est pas majorée).

VII.A.1) On suppose Lf bornée sur E et on note M un majorant de cette fonction. Montrons que

$$\forall b \geq 0, \int_0^b f(t)e^{-\alpha t} dt \leq M \quad (*)$$

Fixons donc $b \geq 0$; $G_b : x \mapsto \int_0^b f(t)e^{-xt} dt$ est continue sur \mathbb{R} par théorème sur les intégrales à paramètres car

- $\forall x \in \mathbb{R}, t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est continue sur $[0, b]$
- $\forall t \in [0, b], x \mapsto f(t)e^{-xt}$ est continue sur \mathbb{R}
- $\forall [u, v] \subset \mathbb{R}, \forall x \in [u, v], \forall t \in [0, b], |f(t)e^{-xt}| \leq f(t)e^{-ut}$ et le majorant est intégrable sur $[u, v]$ puisque continu sur ce SEGMENT).

Or, $\forall x \in E, G_b(x) \leq Lf(x)$ (car f est positive) et donc $\forall x \in E, G_b(x) \leq M$. En faisant tendre x vers α , on obtient (*).

$b \mapsto \int_0^b f(t)e^{-\alpha t} dt$ est ainsi majoré sur \mathbb{R}^+ et c'est une fonction croissante (car f est positive). Elle admet donc une limite finie quand $b \rightarrow +\infty$ et donc

$$\alpha \in E' = E$$

VII.A.2) Par contraposée, si $\alpha \notin E$ alors Lf n'est pas bornée. Avec la remarque initiale de monotonie, on a donc

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} Lf(x) = +\infty$$

VII.B. On a ici (pour $x \in E'$) $Lf(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{(1+t)^x} dt$.

VII.B.1) Si $x > 1$ alors $\left| \frac{\cos(t)}{(1+t)^x} \right| \leq \frac{1}{(1+t)^x}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ et $x \in E$.

Si $x \leq 1$ alors on remarque que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\cos(t)|}{(1+t)^x} dt \geq \int_{n\pi}^{n\pi+\pi/4} \frac{dt}{\sqrt{2}(1+t)^x} \geq \frac{\pi}{4\sqrt{2}(1+(n+1)\pi)^x}$$

On conclut alors comme en V.A que $x \notin E$. Ainsi

$$E =]1, +\infty[$$

VII.B.2) Il s'agit de voir si $G : b \mapsto \int_0^b \frac{\cos(t)}{(1+t)^x} dt$ admet une limite en $+\infty$.

- Si $x > 0$, une intégration par parties donne

$$\forall b \geq 0, G(b) = \frac{\sin(b)}{(1+b)^x} + x \int_0^b \frac{\sin(t)}{(1+t)^{x+1}} dt$$

les deux termes du membre de droite admettent une limite quand $b \rightarrow +\infty$ (en particulier, la fonction sous l'intégrale est intégrable car dominée par $1/t^{x+1}$). Il en est de même du membre de gauche et $x \in E'$.

- Si $x = 0$ alors $G(b) = \sin(b)$ n'admet pas de limite en $+\infty$ et $0 \notin E'$.

- Si $x < 0$ alors $\int_{2n\pi}^{2n\pi+\pi/4} \frac{\cos(t)}{(1+t)^x} dt \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{2n\pi}^{2n\pi+\pi/4} \frac{1}{(1+t)^x} dt \geq \frac{\pi}{4\sqrt{2}}(1+n\pi)^{-x}$ ne tend pas vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$. Ainsi $G(2n\pi + \pi/4) - G(2n\pi)$ ne tend pas vers 0 et $x \notin E'$ (sinon, notre différence tendrait vers 0 comme différence de deux termes ayant la même limite).

On a donc montré que

$$E' =]0, +\infty[$$

VII.B.3) On réutilise le calcul de VI.B.2) dans le cas $x > 0$ qui nous donne

$$\forall x > 0, Lf(x) = x \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{(1+t)^{x+1}} dt$$

En utilisant le théorème de continuité des intégrales à paramètre, on obtient que $x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{(1+t)^{x+1}} dt$ est continue sur $]1, +\infty[$ (on utilise la domination $\left| \frac{\sin(t)}{(1+t)^{x+1}} \right| \leq \frac{1}{(1+t)^2}$). On en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} Lf(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{(1+t)^2} dt$$

En refaisant une intégration par partie dans l'autre sens, on montre que $Lf(x) \rightarrow Lf(1) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{1+t} dt$ quand $x \rightarrow 1^+$.

Une utilisation de la transformation L .

VIII.A. Soient $P, Q \in \mathcal{P}$. $t \mapsto \overline{P(t)}Q(t)e^{-t}$ est continue sur \mathbb{R}^+ et dominée par $1/t^2$ au voisinage de $+\infty$ (croissances comparées). C'est donc une fonction intégrable sur \mathbb{R}^+ et son intégrale existe a fortiori sur \mathbb{R}^+ .

VIII.B. L'application est bien définie, possède la symétrie hermitienne ($(P, Q) = \overline{(Q, P)}$) et est linéaire par rapport à la seconde variable (par linéarité du passage à l'intégrale). De plus si $P \in \mathcal{P}$, $(P, P) = \int_0^{+\infty} |P(t)|^2 e^{-t} dt \geq 0$ et si cette quantité est nulle alors $P = 0$ (car $t \mapsto |P(t)|^2 e^{-t}$ est alors continue positive d'intégrale nulle et donc nulle et l'exponentielle ne s'annule pas).

On a finalement un produit scalaire sur le \mathbb{C} -espace vectoriel \mathcal{P} .

VIII.C. U est linéaire par linéarité du passage à la dérivée. De plus, $U(X^0) = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad U(X^n)(t) = e^t D(nt^n e^{-t}) = -nt^n + n^2 t^{n-1}$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $U^n \in \mathcal{P}$. Comme tout élément de \mathcal{P} est combinaison linéaire d'éléments de la famille $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$, \mathcal{P} est stable par U . Finalement

$$U \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$$

VIII.D. On a $\overline{U(P)(t)Q(t)}e^{-t} = D(te^{-t}\overline{P'(t)})Q(t)$. Une intégration par parties donne

$$\forall a \geq 0, \int_0^a \overline{U(P)(t)Q(t)}e^{-t} dt = [te^{-t}\overline{P'(t)}Q(t)]_0^a - \int_0^a te^{-t}\overline{P'(t)}Q'(t) dt$$

Par croissances comparées, les différents termes admettent une limite quand $a \rightarrow +\infty$ et on obtient

$$\int_0^{+\infty} \overline{U(P)(t)Q(t)}e^{-t} dt = - \int_0^{+\infty} te^{-t}\overline{P'(t)}Q'(t) dt$$

On montre de même que

$$\int_0^{+\infty} \overline{P(t)U(Q)(t)}e^{-t} dt = - \int_0^{+\infty} te^{-t}\overline{P'(t)}Q'(t) dt$$

La dérivée du conjugué étant le conjugué de la dérivée on a l'égalité des termes précédents :

$$(U(P), Q) = (P, U(Q))$$

VIII.E. $U(1) = 0$ montre que U admet au moins 0 comme valeur propre.

Soit λ une valeur propre de U et P un vecteur propre associé. On a alors

$$\bar{\lambda}\|P\|^2 = (\lambda P, P) = (U(P), P) = (P, U(P)) = (P, \lambda P) = \lambda\|P\|^2$$

et comme $P \neq 0$ (c'est un vecteur propre) on a $\|P\|^2 \neq 0$ et donc $\lambda = \bar{\lambda}$ c'est à dire $\lambda \in \mathbb{R}$.

Soient λ, μ deux valeurs propres distinctes (réelles d'après ce qui précède) et P, Q des vecteurs propres associés. On a

$$\lambda(P, Q) = \bar{\lambda}(P, Q) = (U(P), Q) = (P, U(Q)) = \mu(P, Q)$$

Comme $\lambda \neq \mu$, on a donc $(P, Q) = 0$ et les vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux (les sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux).

VIII.F.1) $U(P)(t) = e^t D(te^{-t}P'(t)) = -tP'(t) + P'(t) + tP''(t)$. Si $U(P) = \lambda P$, P est solution de l'équation différentielle

$$ty''(t) + (1-t)y'(t) - \lambda y(t) = 0$$

VIII.F.2) Soit n le degré de P . Il existe $Q \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ et $a \in \mathbb{C}^*$ tels que $P(t) = at^n + Q(t)$. Le coefficient de X^n dans $XP'' + (1-X)P' - \lambda P$ est $-na - \lambda a$. On en déduit que $\lambda = -\deg(P)$.

VIII.G.1) Soit $P \in \mathcal{P}$; on a $L(XP')(x) = \int_0^{+\infty} tP'(t)e^{-tx} dt$. Une intégration par parties (dont on ne détaille pas le calcul avec le passage par une borne flottante) donne (compte-tenu des croissances comparées et de la question IV.A)

$$\forall x > 0, L(XP')(x) = - \int_0^{+\infty} P(t)(e^{-tx} - xte^{-tx}) dt = -LP(x) - x(LP)'(x)$$

et de façon similaire,

$$\begin{aligned}
 \forall x > 0, L(XP'')(x) &= - \int_0^{+\infty} P'(t)(e^{-tx} - xte^{-tx}) dt \\
 &= -L(P')(x) + x \int_0^{+\infty} tP'(t)e^{-tx} dt \\
 &= -L(P')(x) - x \int_0^{+\infty} P(t)(e^{-tx} - xte^{-tx}) dt \\
 &= -L(P')(x) - xLP(x) - x^2(LP)'(x)
 \end{aligned}$$

Supposons $XP'' + (1-X)P' + nP = 0$. On a alors $L(XP'') + L(P') - L(XP') + nL(P) = 0$ ce qui donne

$$\forall x > 0, x(1-x)(LP)'(x) + (1-x)LP(x) + nLP(x) = 0$$

$Q = LP$ est donc solution sur $]0, +\infty[$ de

$$x(1-x)y'(x) + (n+1-x)y(x) = 0 \quad (E'_n)$$

VIII.G.2) Sur $]1, +\infty[$, l'équation (E'_n) est résolue et à coefficients continus. L'ensemble de ses solutions est (théorème de Cauchy-Lipschitz) un espace vectoriel (l'équation est homogène) de dimension 1. Comme

$$\forall x > 1, \frac{x-n-1}{x(1-x)} = -\frac{n+1}{x} + \frac{n}{1-x}$$

une primitive sur $]1, +\infty[$ de $x \mapsto \frac{x-n-1}{x(1-x)}$ est $x \mapsto \ln\left(\frac{(x-1)^n}{x^{n+1}}\right)$. Le cours indique que l'ensemble des solutions sur $]1, +\infty[$ de (E'_n) est l'espace vectoriel engendré par

$$f_n : x \mapsto \frac{(x-1)^n}{x^{n+1}}$$

Raisonnons par conditions nécessaires puis suffisantes pour trouver les éléments propres de U .

- Soit λ une valeur propre et P un vecteur propre associé. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda = -n$ et P est solution de (E_n) (question VIII.F). LP est ainsi solution de (E'_n) sur $]1, +\infty[$ et LP est multiple de f_n . Par ailleurs

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} \frac{k!}{x^{k+1}}$$

Avec la question IV.B dans le cas $a = 0$, on voit que f_n est image par L de $Q_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} X^k$. Ainsi, avec la partie VI, P est un multiple de Q_n (puisque LP est multiple de LQ_n).

- Réciproquement on montre que $UQ_n = -nQ_n$ par un calcul que nous omettons en cette fin de problème.

On a donc montré que les valeurs propres de U sont les éléments de \mathbb{Z}^- et que chaque sous-espace propre est une droite vectorielle dont on a donné une base.

VIII.G.3) D'après la formule de Leibniz, on a

$$\begin{aligned}
 P_n(t) &= e^t \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^k(e^{-t}) D^{n-k}(t^n) \\
 &= e^t \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k e^{-t} \frac{n!}{k!} t^k \\
 &= n! Q_n(t)
 \end{aligned}$$

P_n engendre donc aussi la droite vectorielle propre associée à la valeur propre $-n$.