DEVOIR SURVEILLÉ n° 6 (4H)

Exercice

On considère $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel euclidien des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels muni du produit scalaire canonique défini pour A et B matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par :

$$(A|B) = \mathrm{trace}({}^tA \cdot B).$$

1. Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ sont deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, que vaut le réel $(A|A')$?

2. On note $\mathcal{T}$ le sous-espace vectoriel formé des matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Donner, pour le produit scalaire canonique, une base orthonormée de $\mathcal{T}$ et de son orthogonal $\mathcal{T}^\perp$.

3. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, déterminer le projeté orthogonal de la matrices A sur $\mathcal{T}$, ainsi que la distance de la matrice A à $\mathcal{T}$.

Problème

Dans tout ce problème, on note :
- $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$;
- E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, continues, telles que, pour tout $x > 0$ réel, la fonction $t \longmapsto f(t)e^{-xt}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}^+$;
- F l'ensemble des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}^+$.

Pour tout f dans E, on appelle **transformée de Laplace** de f et on note $\mathcal{L}(f)$ la fonction définie pour tout $x > 0$ réel par :

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\mathrm{d}t.$$

1. Question préliminaire

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux.

Pour tout x dans $[a, +\infty[$, on pose : $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

On considère les propositions suivantes :
(i) f est intégrable sur $[a, +\infty[$;
(ii) F admet une limite finie en $+\infty$.

Donner, sans démonstration, toutes les implications possibles entre (i) et (ii) lorsque :

(a) f est positive sur $[a, +\infty[$;

(b) f n'est pas positive sur $[a, +\infty[$.

Partie I : Exemples et propriétés

2. **(a)** Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.

(b) Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

(c) Justifier que $\mathcal{L}$ est une application linéaire de E dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$, espace vectoriel des applications de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

3. **(a)** On considère $\mathcal{U} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\mathcal{U}(t) = 1$. Déterminer $\mathcal{L}(\mathcal{U})$.

(b) Soit $\lambda \geqslant 0$ réel. On considère $h_\lambda : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $t \geqslant 0$ réel par :

$$h_\lambda(t) = e^{-\lambda t}.$$

Démontrer que h_λ est dans E et déterminer $\mathcal{L}(h_\lambda)$.

4. Soient f dans E et n dans $\mathbb{N}$. On considère $g_n : t \longmapsto t^n f(t)$ de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
Pour $x > 0$, justifier l'existence de $A > 0$ tel que $t^n e^{-xt} \leqslant e^{-\frac{xt}{2}}$ pour tout $t \geqslant A$.
En déduire que g_n est un élément de E.

5. **Transformée de Laplace d'une dérivée**
Soit f dans E de classe $\mathcal{C}^1$, croissante et bornée sur $[0, +\infty[$. Démontrer que f' est encore dans E et que l'on a :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0).$$

6. **Régularité d'une transformée de Laplace**

(a) Démontrer que, pour tout f dans E, la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et que l'on a : $\mathcal{L}(f)' = -\mathcal{L}(g_1)$ où g_1 est définie à la question **4**.

(b) Démontrer que, pour tout f dans E, la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathcal{L}(f)^{(n)}(x)$ à l'aide d'une transformée de Laplace.

Partie II : Comportements asymptotiques de la transformée de Laplace

Dans toute cette partie, f est un élément de E

7. On suppose dans cette question que f est dans F.

(a) Déterminer la limite en $+\infty$ de $\mathcal{L}(f)$.

(b) *Théorème de la valeur initiale*
On suppose, de plus, que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$, avec f' bornée sur $\mathbb{R}^+$. Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} x\mathcal{L}(f)(x) = f(0)$.

8. **Théorème de la valeur finale**
On suppose dans cette question que $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = l$ où l est un réel. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs qui converge vers 0.

(a) Démontrer que f appartient à F.

(b) Soit n un entier naturel. Démontrer que $a_n \mathcal{L}(f)(a_n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} h_n(x) \mathrm{d}x$ où h_n est la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $h_n(x) = e^{-x} f\left(\dfrac{x}{a_n}\right)$.

(c) En déduire, à l'aide du théorème de convergence domin'ee, que : $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n \mathcal{L}(f)(a_n) = l$.

(d) Lorsque $l \neq 0$, déterminer un équivalent de $\mathcal{L}(f)(x)$ en 0.

9. Dans cette question, on suppose que f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et on pose : $R(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ pour tout x dans $[0, +\infty[$.

(a) Démontrer que R est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et déterminer R'.
En déduire que, pour tout $x > 0$ réel, on a : $\mathcal{L}(f)(x) = R(0) - x\mathcal{L}(R)(x)$.

(b) On fixe $\varepsilon > 0$.
Justifier de l'existence de A réel positif tel que pour tout $t \geqslant A$, on ait : $|R(t)| \leqslant \varepsilon$.
En déduire que, pour tout $x > 0$, on a :

$$|\mathcal{L}(f)(x) - R(0)| \leqslant x \int_0^A |R(t)|\mathrm{d}t + \varepsilon.$$

(c) Démontrer que $\mathcal{L}(f)$ se prolonge par continuité en 0 (on précisera la valeur en 0 de ce prolongement).

Partie III : Application

10. Calcul de l'intégrale de Dirichlet

Ici, f est la fonction définie par : $f(0) = 1$ et $f(t) = \dfrac{\sin(t)}{t}$ pour $t > 0$ réel.

(a) Démontrer que la fonction $F : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finie réelle l en $+\infty$.

(b) En considérant la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ où $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |f(t)|\mathrm{d}t$, démontrer que f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

(c) Soit $x > 0$. Démontrer, en détaillant les calculs, que, pour tout $X > 0$, on a :

$$\int_0^X \sin(t)\, e^{-xt}\, \mathrm{d}t = -\,\frac{1}{1+x^2}\left(e^{-xX}(x\sin(X) + \cos(X)) - 1\right).$$

Démontrer que la fonction $t \longmapsto \sin(t)\, e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
Déterminer alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)\, e^{-xt}\mathrm{d}t$.

(d) Déterminer, pour $x > 0$, une expression simple de $\mathcal{L}(f)(x)$ et en déduire l.
Pour cela, on pourra utiliser le résultat suivant (la démarche de la preuve étant identique à celle de la question **9**) : lorsque f dans E vérifie : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = l \in \mathbb{R}$, alors $\displaystyle\lim_{x\to 0} \mathcal{L}(f)(x) = l$.
On notera que, par rapport à la question **9**, on a remplacé l'hypothèse "f intégrable sur $\mathbb{R}^+$" par l'hypothèse "$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = l \in \mathbb{R}$".

DEVOIR SURVEILLÉ n° 6 (4H)

- Dans le problème, λ désigne *toujours* une application continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, croissante et non majorée.
- Dans le problème, f désigne *toujours* une application continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$.
- On note E l'ensemble des réels x pour lesquels l'application $t \mapsto f(t)e^{-\lambda(t)x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
- On note E' l'ensemble des réels x pour lesquels l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-\lambda(t)x}\, dt$ converge.

On se propose ci-après d'étudier la transformation $f \mapsto Lf$ définien en I.A, d'en établir quelques propriétés, d'examiner certains exemples et d'utiliser la transformation L pour l'étude d'un opérateur.

Préliminaires, définition de la transformation L.

I.A. Quelle inclusion exsiste-t-il entre les ensembles E et E' ?

Désormais, pour $x \in E'$, on notera

$$Lf(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-\lambda(t)x}\, dt$$

I.B. Montrer que si E n'est pas vide, alors E est un intervalle non majoré de $\mathbb{R}$.

I.C. Montrer que si E n'est pas vide, alors Lf est continue sur E.

Exemples dans le cas de f positive.

II.A. Comparer E et E' dans le cas où f est positive.

II.B. Dans les trois cas suivants, déterminer E.

II.B.1) $f(t) = \lambda'(t)$ avec λ supposée de classe C^1.

II.B.2) $f(t) = e^{t\lambda(t)}$.

II.B.3) $f(t) = \frac{e^{-t\lambda(t)}}{1+t^2}$.

II.C. Dans cette question, on étudie le cas $\lambda(t) = t^2$ et $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

II.C.1) Déterminer E. Que vaut $Lf(0)$?

II.C.2) Prouver que Lf est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

II.C.3) Montrer l'existence d'une constante $A > 0$ telle que pour tout $x > 0$, on ait

$$Lf(x) - (Lf)'(x) = \frac{A}{\sqrt{x}}$$

II.C.4) On note $g(x) = e^{-x}Lf(x)$ pour $x \geq 0$. Montrer que

$$\forall x \geq 0,\ g(x) = \frac{\pi}{2} - A\int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt$$

II.C.5) En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$.

Etude d'un premier exemple.

Dans cette partie, $\lambda(t) = t$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et $f(t) = \frac{t}{e^t - 1} - 1 + \frac{t}{2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}^{+*}$.

III.A. Montrer que f se prolonge par continuité en 0. On note encore f le prolongement obtenu.

III.B. Déterminer E.

III.C. A l'aide d'un développement en série, montrer que pour tout $x > 0$, on a

$$Lf(x) = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$$

III.D. Est-ce que $Lf(x) - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x}$ admet une limite finie en 0^+ ?

Généralités dans le cas typique.

Dans cette partie, $\lambda(t) = t$ pour $t \in \mathbb{R}^+$.

IV.A. Montrer que si E n'est pas vide et si α est sa borne inférieure (on convient que $\alpha = -\infty$ si $E = \mathbb{R}$) alors Lf est de classe C^∞ sur $]\alpha, +\infty[$ et exprimer ses dérivées successives à l'aide d'une intégrale.

IV.B. Dans le cas particulier où $f(t) = e^{-at}t^n$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$, expliciter E, E' et calculer $Lf(x)$ pour $x \in E'$.

IV.C. Comportement en l'infini.

On suppose ici que E n'est pas vide et que f admet au voisinage de 0 le développement limité d'ordre $n \in \mathbb{N}$ suivant :

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} t^k + O(t^{n+1})$$

IV.C.1) Montrer que pour tout $\beta > 0$, on a, lorsque x tend vers $+\infty$, le développement asymptotique suivant :

$$\int_0^\beta \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} t^k \right) e^{-tx} \, dt = O(x^{-n-2})$$

IV.C.2) En déduire que lorsque x tend vers $+\infty$, on a le développement asymptotique :

$$Lf(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^{k+1}} + O(x^{-n-2})$$

IV.D. Comportement en 0**.**

On suppose ici que f admet une limite finie ℓ en $+\infty$.

IV.D.1) Montrer que E contient $\mathbb{R}^{+*}$.

IV.D.2) Montrer que $xLf(x)$ tend vers ℓ en 0^+.

Etude d'un deuxième exemple.

Dans cette partie, $\lambda(t) = t$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et $f(t) = \frac{\sin(t)}{t}$ pour tout $t > 0$, f étant prolongée par continuité en 0.

V.A. Montrer que E ne contient pas 0.

V.B. Montrer que $E =]0, +\infty[$.

V.C. Montrer que E' contient 0.

V.D. Calculer $(Lf)'(x)$ pour $x \in E$.

V.E. En déduire $(Lf)(x)$ pour $x \in E$.

V.F. On note pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \geq 0$, $f_n(x) = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx}\, dt$. Montrer que $\sum (f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

V.G. Que vaut $Lf(0)$?

Injectivité dans le cas typique.

Dans cette partie, $\lambda(t) = t$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

VI.A. Soit g une application continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\int_0^1 t^n g(t)\, dt = 0$$

VI.A.1) Que dire de $\int_0^1 P(t)g(t)\, dt$ pour $P \in \mathbb{R}[X]$?

VI.A.2) En déduire que g est l'application nulle.

VI.B. Soient f fixée telle que E soit non vide, $x \in E$ et $a > 0$. On pose $h(t) = \int_0^t e^{-xu} f(u)\, du$ pour tout $t \geq 0$.

VI.B.1) Montrer que $Lf(x + a) = a \int_0^{+\infty} e^{-at} h(t)\, dt$.

VI.B.2) On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $Lf(x + na) = 0$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^1 u^n h\left(-\frac{\ln(u)}{a}\right) du$ converge et qu'elle est nulle.

VI.B.3) Qu'en déduit-on pour la fonction h ?

VI.C. Montrer que l'application qui à f associe Lf est injective.

Etude en la borne inférieure de E.

VII.A. Cas positif.

On suppose que f est positive et que E n'est ni vide ni égal à $\mathbb{R}$. On note α sa borne inférieure.

VII.A.1) Montrer que si Lf est bornée sur E, alors $\alpha \in E$.

VII.A.2) Si $\alpha \notin E$, que dire de $Lf(x)$ quand x tend vers α^+ ?

VII.B. Dans cette question, $f(t) = \cos(t)$ et $\lambda(t) = \ln(1 + t)$.

VII.B.1) Déterminer E.

VII.B.2) Déterminer E'.

VII.B.3) Montrer que Lf admet une limite en α, borne inférieure de E, et la déterminer.

Une utilisation de la transformation L.

Dans cette partie, $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des fonctions polynomiales à coefficients réels et on utilise la transformation L appliqué à des éléments de $\mathcal{P}$ pour l'étude d'un opérateur U.

VIII.A. Soient P, Q deux éléments de $\mathcal{P}$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\, dt$ converge.

VIII.B. Pour tout couple $(P, Q) \in \mathcal{P}^2$, on note

$$(P, Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\, dt$$

Vérifier que $(.,.)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{P}$.

VIII.C. On note D l'endomorphisme de dérivation et U l'endomorphisme de $\mathcal{P}$ défini par

$$U(P)(t) = e^t D(te^{-t} P'(t))$$

Vérifier que U est endomorphisme de $\mathcal{P}$.

VIII.D. Montrer que pour tous P, Q de $\mathcal{P}$ on a

$$(U(P), Q) = (P, U(Q))$$

VIII.E. Montrer que U admet des valeurs propres dans $\mathbb{C}$, qu'elles sont réelles et que deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

VIII.F. Soient λ une valeur propre de U et P un vecteur propre associé.

VIII.F.1) Montrer que P est solution d'une équation différentielle linéaire simple que l'on précisera.

VIII.F.2) Quel lien y-a-t-il entre λ et le degré de P ?

VIII.G. Description des éléments propres de U.

On considère sur $[0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$(E_n) \ : \ tP'' + (1-t)P' + nP = 0$$

avec $n \in \mathbb{N}$ et d'inconnue $P \in \mathcal{P}$.

VIII.G.1) En appliquant la transformation L avec $\lambda(t) = t$ à (E_n), montrer que si P est solution de (E_n) sur $[0, +\infty[$, alors son image Q par L est solution d'une équation différentielle (E'_n) d'ordre 1 sur $]1, +\infty[$.

VIII.G.2) Résoudre l'équation (E'_n) sur $]1, +\infty[$ et en déduire les valeurs et vecteurs propres de l'endomorphisme U.

VIII.G.3) Quel est le lien entre ce qui précède et les fonctions polynomiales définies pour $n \in \mathbb{N}$ par $P_n(t) = e^t D^n(e^{-t}t^n)$?