Devoir surveillé 5 : Éléments de correction

Exercice : (à venir)

Problème :

Partie 1

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est continue, décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc sur $[p, p+1]$. Donc pour $t \in [p, p+1]$, $\dfrac{1}{p+1} \leq \dfrac{1}{t} \leq \dfrac{1}{t}$. En intégrant entre p et $p+1$, on obtient $\dfrac{1}{p+1} \leq a_p \leq \dfrac{1}{p}$ puis l'inégalité demandé en soustrayant $\dfrac{1}{p+1}$ dans chaque membre.

2. En sommant les inégalités pour p entre 1 et n, et par somme télescopique, on obtient $0 \leq S_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} a_p \leq 1 - \dfrac{1}{n+1} \leq 1$.
La suite (S_n) est croissante car $a_p \geq 0$ et majorée par 1 donc converge vers une limite $\gamma \in [0,1]$.

3. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. En posant $t = x+p$, on a $a_p = \dfrac{1}{p} - \displaystyle\int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{x+p} = \int_0^1 \left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{x+p}\right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \dfrac{x\mathrm{d}x}{x(x+p)} = \dfrac{1}{p}\int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{x+p}$.
Alors pour $p \geq 2$, et $x \in [0,1]$, $0 < p-1 \leq p-t \leq p+1$ et donc $\dfrac{1}{p+1} \leq \dfrac{1}{x+p} \leq \dfrac{1}{p-1}$ et $\dfrac{x}{p(p+1)} \leq \dfrac{x}{p(x+p)} \leq \dfrac{x}{p(p-1)}$.
En intégrant (croissance de l'intégrale) :

$$\frac{1}{2}\frac{1}{p(p+1)} \leq a_p \leq \frac{1}{2}\frac{1}{p(p-1)}.$$

4. En faisant la somme entre $n+1$ et m, on obtient après simplification (somme télescopique) :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1}\right) \leq S_m - S_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right).$$

Alors en faisant tendre m vers $+\infty$ (n étant fixé), on obtient : $\dfrac{1}{2n+2} \leq \gamma - S_n \leq \dfrac{1}{2n}$.

5. Alors $\gamma - S_n \sim \dfrac{1}{2n}$ par encadrement. Donc $\gamma - S_n = \dfrac{1}{2n} + o(1/n)$. Comme $S_n = H_n - \ln(n+1) = H_n - (\ln n + \ln(1+1/n)) = H_n - \ln n - \dfrac{1}{n} + o(1/n)$, on retrouve le développement asymptotique déjà montré en classe par théorème de comparaison des séries (divergentes) et intégrales pour la série harmonique :

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o(1/n).$$

6. En partant de l'inégalité de la question 4, on a $\dfrac{1}{2+n+2} \leq \gamma - T_n \leq \dfrac{1}{2n}$, donc

$$0 \leq \gamma - S_n - \frac{1}{2n+2} = \gamma - T_n \leq \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{2n(n+1)}.$$

Partie 2

1. a. La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{1-e^{-t}}$ est continue par morceaux sur $[1,+\infty[$. Au voisinage de $+\infty$, $0 \leq \dfrac{e^{-t}}{1-e^{-t}} \sim e^{-t} = o(1/t^2)$. Par Riemann et comparaison des intégrales de fonctions positives, la première intégrale est convergente.

De même $0 \leq \dfrac{e^{-t}}{t} \leq e^{-t}$ donc par comparaison, la seconde intégrale converge également.

b. $\dfrac{1}{1-e^{-t}} - \dfrac{1}{t} = \dfrac{t-(1-e^{-t})}{t(1-e^{-t})} = \dfrac{t-(1-(1-t+t^2/2+o(t^2))}{t(1-(1-t+o(t))} \sim_{0^+} \dfrac{-t^2/2}{-t^2} \sim_{0^+} \dfrac{1}{2}$.

Donc l'expression $\dfrac{1}{1-e^{-t}} - \dfrac{1}{t}$ tend vers $1/2$ lorsque t tend vers 0.

c. La fonction $u : t \mapsto e^{-t}\dfrac{1}{1-e^{-t}} - \dfrac{1}{t}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)\mathrm{d}t$ est faussement impropre en 0. Elle est convergente au voisinage de $+\infty$.

Donc elle est convergente.

2. a. Les fonctions en jeu sont continues sur $[x, y]$, donc toutes les intégrales existent.

En posant $u = at$ dans la première intégrale et $u = bt$ dans la seconde, on obtient :

$$\int_x^y \frac{e^{-at}}{t}\mathrm{d}t - \int_x^y \frac{e^{-bt}}{t}\mathrm{d}t = \int_{ax}^{ay} \frac{e^{-u}}{u}\mathrm{d}u - \int_{bx}^{by} \frac{e^{-u}}{u}\mathrm{d}u = \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-u}}{u}\mathrm{d}u - \int_{ay}^{by} \frac{e^{-u}}{u}\mathrm{d}u$$

par relation de Chasles (on peut aussi écrire des crochets).

b. À $z > 0$ fixé, par décroissante de la fonction $t \mapsto e^{-t}$, si $t \in [az, bz]$ alors $e^{-bz} \leq e^{-t} \leq e^{-az}$. Par croissance de l'intégrale,

$$e^{-bz}\ln(b/a) = \int_{az}^{bz} \frac{e^{-bz}}{t}\mathrm{d}t \leq \int_{az}^{bz} \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t \leq \int_{az}^{bz} \frac{e^{-az}}{t}\mathrm{d}t = e^{-az}\ln(b/a).$$

c. Les deux gendarmes tendent vers $\ln(b/a)$ lorsque z tend vers 0.

En posant d'abord $z = x$, $\displaystyle\int_{ax}^{bx} \frac{e^{-u}}{u}\mathrm{d}u$ tend vers $\ln(b/a)$ lorsque x tend vers 0.

En posant ensuite $z = y$, $0 \leq \displaystyle\int_{ay}^{by} \frac{e^{-u}}{u}\mathrm{d}u \leq e^{-ay}\ln(b/a)$ tend vers 0 lorsque y tend vers $+\infty$.

Finalement, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t} - \frac{e^{-bt}}{t}\mathrm{d}t = \ln(b/a)$ par différence des deux limites.

3. a. Pour $t > 0$, $0 < e^{-t} < 1$ Par développement en série entière, $\dfrac{1}{1-e^{-t}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(e^{-t})^n$ comme demandé.

Par série télescopique, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt} - e^{-(n+1)t} = 1 - \lim_{e^{-(n+1)t}} = 1$ car $t > 0$.

On obtient l'égalité en divisant par t.

b. Alors $e^{-t}\left(\dfrac{1}{1-e^{-t}-\dfrac{1}{t}}\right) = e^{-t}\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nt}-e^{-(n+1)t}}{t}\right) =$ l'expression demandée en développant.

c. Cela revient à montrer que $1 - e^{-t} \leq t$, c'est à dire $e^{-t} \geq 1 - t$ ce qui est une inégalité de convexité (courbe de $t \mapsto e^{-t}$ au dessus de sa tangente en 0)

d. Posons $f_n(t) = e^{-(n+1)t} - \dfrac{e^{-(n+1)t} - e^{-(n+2)t}}{t}$ et $f(t) = e^{-t}\left(\dfrac{1}{1-e^{-t}} - \dfrac{1}{t}\right)$.

Alors chaque fonction f_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$ et positive d'après l'inégalité précédente.

La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers f sur $\mathbb{R}_+^*$

Pour $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n| = \int_0^{+\infty} f_n = \frac{1}{n+1} - \ln((n+2)/(n+1)) = a_{n+1}$.

La série $\sum a_{n+1}$ est convergente de somme γ d'après la partie 1.

Par théorème d'intégration terme à terme de Beppo-Levi,

$$\int \sum u_n = \sum \int u_n = \gamma.$$

Ainsi, $\gamma = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t$.

4. a. Pour $\displaystyle\int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} \mathrm{d}t = [\ln(1-e^{-t})]_y^{+\infty}$ qui est un crochet convergent de valeur $-\ln(1-e^{-y})$.

Lorsque y tend vers 0^+, $\ln y + \displaystyle\int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} \mathrm{d}t = \ln y - \ln(1-e^{-y}) = \ln(\frac{y}{1-e^{-y}}) = \ln(y/(y+o(1))) = \ln(1+o(1)) = o(1)$ tend vers 0.

b. En remplaçant γ par $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t$, on obtient :

$$\gamma + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \mathrm{d}t$$

Alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \mathrm{d}t = \int_0^{y} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t + \int_y^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \mathrm{d}t$

$= \displaystyle\int_0^{y} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} \mathrm{d}t.$

c. L'intégrande de la première expression admet une limite finie en 0. Donc si y tend vers 0, la première intégrale tend vers 0.

D'après la question a), $\ln(y) + \displaystyle\int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} \mathrm{d}t$ tend aussi vers 0. Par somme des limites, l'ensemble tend vers 0.

d. La fonction $t \mapsto e^{-t} \ln t$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.

Au voisinage de $+\infty$, $e^{-t} \ln t = o(1/t^2)$ par croissances comparées

Au voisinage de 0, $e^{-t} \ln t \sim \ln t = o(1/\sqrt{t})$ par croissances comparées.

Par critères de Riemann en 0 et en $+\infty$ et théorèmes de comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t \mathrm{d}t$ est donc convergente.

Posons $u(t) = e^{-t}$ et $v(t) = \ln t$ alors $[uv]_y^{+\infty} = e^{-y} \ln y$ est un crochet convergent. Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. Par intégration par parties généralisée,

$$\int_y^{+\infty} e^{-t} \ln t \mathrm{d}t = e^{-y} \ln y + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \mathrm{d}t.$$

e. Pour $y > 0$,

$$\gamma + \int_y^{+\infty} e^{-t} \ln t \mathrm{d}t = \left(\gamma + \ln y + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \mathrm{d}t\right) + \left(\int_y^{+\infty} e^{-t} \ln t \mathrm{d}t - e^{-y} \ln y - \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \mathrm{d}t\right) + (e^{-y} \ln y - \ln y).$$

Lorsque y tend vers 0^+ :

La première parenthèse tend vers 0 d'après c).

La seconde aussi d'après d).

Enfin, $(e^{-y}\ln y - \ln y) = (e^{-y}-1)\ln y \sim y\ln y$ qui tend vers 0 également par croissances comparées.

Finalement, l'expression du départ tend vers 0 lorsque y tend vers 0, ce qui signifie que

$$\gamma = -\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln t \mathrm{d}t.$$

Partie 3

1. a. On a déjà calculé $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\mathrm{d}t = -\ln(1-e^{-1})$.

Alors $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t} - \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\mathrm{d}t = [\ln t - \ln(1-e^{-t})]_0^1 = -\ln(1-e^{-1}) - \lim_{t\to 0^+}\ln(t/(1-e^{-t})) = -\ln(1-e^{-1}) - 0$.

b. $\displaystyle\gamma = \int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$

$\displaystyle= \int_0^1 e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$

$\displaystyle= \int_0^1 e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\mathrm{d}t - \int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t$ car toutes ces intégrales sont convergentes

$\displaystyle= \int_0^1 e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{1}{t} - \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\mathrm{d}t - \int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t$ d'après ce qui précède.

$\displaystyle= \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}\mathrm{d}t - \int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t.$

2. a. Par croissances comparées, pour $x\in\mathbb{R}$, $\displaystyle 0 \le \frac{H_k|x|^k}{k!} \sim \frac{\ln k|x|^k}{k!} = o(1/k^2)$. Par critère de Riemann pour les séries et théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série envisagée est absolument convergente, donc convergente.

Donc F est définie sur $\mathbb{R}$.

On peut appliquer le théorème de dérivation terme à terme pour les séries de fonctions (le vérifier : il y a convergence normale de la série dérivée sur les compacts). Alors F est de classe C^1 et $\displaystyle F'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{H_k}{(k-1)!}x^{k-1}$.

b. Alors $\displaystyle F'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\left(H_k + \frac{1}{k+1}\right)x^k = F(x) + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{(k+1)!} = F(x) + \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = F(x) + \frac{1}{x}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!} = F(x) + \frac{e^x-1}{x}$.

c. (suite à venir)

3.

4.

5.

6.