DEVOIR SURVEILLÉ n° 5 (4H)

Dans tout le problème, ln désigne le logarithme népérien.

Partie 1

Soit x un nombre réel dans $]-1,1]$.

1. Soit n un entier naturel non nul. Démontrer l'égalité :

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i x^i + \frac{(-1)^n x^n}{1+x}.$$

2. En déduire l'égalité

$$\ln(1+x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{i} x^i + \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t} dt.$$

3. Démontrer que la série $\sum \frac{(-1)^{i-1}}{i} x^i$ converge vers $\ln(1+x)$.

4. Démontrer les égalités

$$\ln 2 = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i}$$

$$\ln 2 = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i2^i}$$

5. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite décroissante de nombres réels qui converge vers 0.

a. Soit S_n la somme partielle $\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}u_i$, pour tout entier naturel $n \geq 1$.

i. Démontrer que la suite $(S_{2n})_{n\geq 1}$ est croissante et que la suite $(S_{2n-1})_{n\geq 1}$ est décroissante.

ii. Justifier que la série de terme général $(-1)^{n-1}u_n$ converge. On note S sa somme.

iii. Démontrer que S vérifie, pour tout entier naturel n, l'encadrement :

$$S_{2n} \leq S \leq S_{2n-1}.$$

b. En déduire pour tout entier naturel $n \geq 1$, l'inégalité :

$$|S - S_n| \leq u_n.$$

6. Soit p un entier naturel. Déterminer un entier naturel N_p tel que $\sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{i}$ soit une valeur approchée de $\ln 2$ à 10^{-p} près, pour tout entier naturel $n \geq N_p$.

7. Soit p un entier naturel. On se propose de calculer une valeur de $\ln 2$ à 10^{-p} près en utilisant les sommes partielles $(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i2^i})_{n\geq 1}$.

a. Pour un entier naturel $n \geq 1$, on pose $R_n = \sum_{i=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{i2^i}$. Justifier l'inégalité :

$$0 \leq R_n \leq \frac{1}{2^n}.$$

b. Déterminer un entier naturel N'_p tel que $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{i2^i}$ est une valeur approchée de $\ln 2$ à 10^{-p} près, pour tout entier naturel $n \geq N'_p$.

c. Comparer les ordres de grandeurs de N_p (introduit dans la question 6) et N'_p.

Partie 2

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On désigne par $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel formé par les polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n.

1. Soit P dans $\mathbb{R}_n[X]$. Démontrer qu'il existe un unique polynôme dans $\mathbb{R}_{n+1}[X]$, noté $\phi_n(P)$ tel que $P(-1) - P(X) = (X+1)\phi_n(P)(X)$.

2. Soit ϕ_n l'application ainsi définie de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Démontrer que ϕ_n est une application linéaire. Déterminer le noyau de ϕ_n. L'application ϕ_n est-elle surjective ?

3. Écrire la matrice de ϕ_n de la base $1, X, X^2, \cdots, X^n$ de $\mathbb{R}_n[X]$ sur la base $1, X, X^2, \cdots, X^{n-1}$ de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

4. Soit P le polynôme $\sum_{i=0}^{n} a_i X^i$. Démontrer que $\phi_n(P) = \sum_{j=0}^{n-1} b_j X^j$ où les nombres réels $b_0, \cdots, b_{n-1}$ sont définis par :

$$\forall j \in \{0, \cdots, n-1\}, b_j = (-1)^j \sum_{i=j+1}^{n} (-1)^i a_i.$$

Partie 3

Dans la suite du problème, on désigne par I l'intervalle $]0,1]$. Soit f une fonction continue par morceaux sur I, à valeurs réelles positives, et intégrable sur l'intervalle I.

1. Soit g la fonction définie par

$$\forall x \in I, g(x) = \frac{f(x)}{1+x}.$$

Démontrer que g est intégrable sur l'intervalle I.

2. Soit n un entier naturel. On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle I par :

$$\forall x \in I, f_n(x) = x^n f(x).$$

Démontrer que la fonction f_n est intégrable sur l'intervalle I.

Dans la suite du problème, on note : $S_f = \displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{1+x} dx$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n(f) = \displaystyle\int_0^1 f_n(x) dx$.

3. Démontrer que la série de terme général $(-1)^n u_n(f)$ converge.

4. Justifier l'égalité $\mathcal{E}_f$: $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n(f) = S_f$.

5. Que devient précisément l'égalité $\mathcal{E}_f$ dans les cas suivants :

a. La fonction f est la fonction constante égale à 1 sur l'intervalle I.

b. La fonction f est la fonction définie par :

$$\forall x \in I, f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

c. La fonction f est la fonction définie par :

$$\forall x \in I, f(x) = \frac{1}{3x^{2/3}}.$$

Indication : on pourra démontrer que $S_f = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$ et déterminer des nombres réels a, b, c tels que

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{a}{1+x} + \frac{b(-1+2x)}{1-x+x^2} + \frac{c}{1-x+x^2}.$$

Partie 4

1. Soit P un polynôme et soit n son degré. Démontrer l'égalité :

$$\int_0^1 \frac{P(x)}{1+x} f(x)dx = P(-1)S_f - \int_0^1 \phi_n(P)(x)f(x)dx.$$

Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes à coefficients réels qui vérifient les propriétés suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} T_n \text{ est de degré } n, \\ T_n(-1) \neq 0 \end{cases}$$

On pose

$$S_n = \int_0^1 \phi_n(T_n)(x)f(x)dx \text{ et } M_n = \sup_{x\in[0,1]} |T_n(x)|.$$

2. Pour tout entier naturel n, démontrer l'inégalité :

$$|S_f - \frac{S_n}{T_n(-1)}| \leq \frac{M_n S_f}{|T_n(-1)|}.$$

Partie 5

Dans toute la suite du problème, on considère $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par récurrence par :

$$\begin{array}{rcl} T_0(X) & = & 1 \\ T_1(X) & = & 1-2X \\ T_{n+2}(X) & = & 2(1-2X)T_{n+1}(X) - T_n(X), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{array}$$

1. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = T_n(-1)$, pour tout entier naturel n.

a. Établir une relation entre v_{n+2}, v_{n+1} et v_n pour tout entier naturel n.

b. En déduire l'existence de nombres réels α et β tels que pour tout entier naturel n, $v_n = \alpha(3+\sqrt{8})^n + \beta(3-\sqrt{8})^n$.

c. Déterminer α etβ.

2. Justifier que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les hypothèses de la partie 4.

3. Démontrer que les coefficients du polynôme $T_n(X)$ sont des entiers relatifs pour tout entier naturel n.

4. Démontrer l'égalité $T_n(\sin^2 x) = \cos(2nx)$, pour tout entier naturel n et pour tout nombre réel x.

5. Soit n un entier naturel. Démontrer que $M_n = 1$ et en déduire l'inégalité :

$$\frac{M_n}{|T_n(-1)|} \leq \frac{2}{(3+\sqrt{8})^n}.$$

6. Expliquer comment construire une suite de nombres rationnels $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle qu'il existe une constante K strictement positive vérifiant pour tout entier n,

$$|\ln 2 - t_n| \leq \frac{K}{(3+\sqrt{8})^n}.$$

Partie 6

On suppose de plus dans cette partie que f est une fonction de classe C^5 sur l'intervalle $[0,1]$. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{f(\sin^2(x))\sin(2x)}{1+\sin^2(x)}.$$

1. Justifier que la fonction g est de classe C^5 sur $\mathbb{R}$.

2. Soit P un polynôme. Démontrer l'inégalité :

$$\int_0^1 \frac{P(x)}{1+x} f(x)dx = \int_0^{\pi/2} P(\sin^2(t))g(t)dt.$$

3. Soit n un entier naturel non nul et soit T_n le n-ième polynôme de la suite introduite dans la partie 5. Démontrer l'égalité :

$$4n^2 \int_0^1 \frac{T_n(x)}{1+x} f(x)dx = (-1)^n g'(\pi/2) - g'(0) - \int_0^{\pi/2} \cos(2nx)g''(x)dx.$$

4. Soit alors $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, Q_n(x) = (n+2)^2 T_{n+2}(x) - n^2 T_n(x).$$

Soit n un entier naturel non nul.

a. Démontrer l'égalité :

$$\int_0^1 \frac{Q_n(x)}{1+x} f(x)dx = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} (\cos(2nx) - \cos(2(n+2)x))g''(x)dx.$$

b. On définit U et V par :

$$U = \int_0^1 \frac{Q_n(x)}{1+x} f(x)dx \text{ et } V = \int_0^{\pi/2} \left(-\frac{\sin(2nx)}{n^3} + \frac{\sin(2(n+2)x)}{(n+2)^3}\right) g^{(5)}(x)dx.$$

Exprimer U en fonction de $g^{(3)}\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $g^{(3)}(0)$ et V.

c. En déduire qu'il existe un nombre réel K tel que, pour tout entier naturel n non nul, on a

$$|\int_0^1 \frac{Q_n(f)}{1+x} f(x)dx| \leq \frac{K}{n^3}.$$

5. Expliquer comment construire une suite de nombres rationnels $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle qu'il existe une constante K strictement positive vérifiant, pour tout entier naturel n,

$$|\ln 2 - q_n| \leq \frac{K}{n^5(3+\sqrt{8})^n}.$$