DEVOIR SURVEILLÉ n° 4 (4H)

TYPE MINES-CENTRALE

Les calculatrices sont interdites

On désigne par $C([0,1])$ l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $[0,1]$. Pour tout $a \geq 0$, on note ϕ_a l'élément de $C([0,1])$ défini par $\phi_a(x) = x^a$. Par convention on a posé $0^0 = 1$ de sorte que ϕ_0 est la fonction constante 1.
Soit $\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels ≥ 0 deux à deux distincts. On note W le sous espace vectoriel de $C([0,1])$ engendré la famille $(\phi_{\alpha_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Le but du problème est d'établir des critères de densité de l'espace W dans $C([0,1])$ pour l'une ou l'autre des deux normes classiques $\|.\|_\infty$ ou $\|.\|_2$ définies par :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \qquad \text{et} \qquad \|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

Question préliminaire

1. Montrer que $(\phi_\alpha)_{\alpha\geq 0}$ est une famille libre de $C([0,1])$.

I — Déterminants de Cauchy

On considère un entier $n > 0$ et deux suites finies $(a_k)_{1\leq k\leq n}$ et $(b_k)_{1\leq k\leq n}$ de réels telles que pour tout couple $(i,j) \in [1,n]^2, a_i + b_j \neq 0$. Pour tout entier m tel que $0 < m \leq n$, le *déterminant de Cauchy* d'ordre m est défini par :

$$D_m = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_m} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_m+b_1} & \frac{1}{a_m+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_m+b_m} \end{vmatrix}.$$

On définit la fraction rationnelle : $R(X) = \dfrac{\prod_{k=1}^{n-1}(X-a_k)}{\prod_{k=1}^{n}(X+b_k)}$.

2. Montrer que si $R(X)$ est de la forme $R(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{X+b_k}$ pour des réels c_k, alors $c_nD_n = R(a_n)D_{n-1}$

On pourra pour cela considérer le déterminant obtenu à partir de D_n en remplaçant la dernière colonne par $\begin{pmatrix} R(a_1) \\ R(a_2) \\ \vdots \\ R(a_n) \end{pmatrix}$.

3. En déduire que

$$D_n = \frac{\prod\limits_{1\leq i<j\leq n}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\prod\limits_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}(a_i+b_j)}.$$

II — Distance d'un point à une partie d'un espace normé

Soit E un espace vectoriel normé par une norme $\|\cdot\|$. On rappelle que la distance d'un élément $x \in E$ à une partie non vide A de E est le réel noté $d(x, A)$ défini par :

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|$$

4. Montrer que $d(x, A) = 0$ si et seulement si x est adhérent à A.

5. Montrer que si $(A_n)_{n \geq 0}$ est une suite croissante de parties de E et si $A = \bigcup_{n \geq 0} A_n$ alors $d(x, A) = \lim\limits_{n \to \infty} d(x, A_n)$.

On considère un sous-espace vectoriel V *de dimension finie* de E, et on note $B = \big\{y : \|y - x\| \leq \|x\|\big\}$.

6. Montrer que $B \cap V$ est compacte et que $d(x, V) = d(x, B \cap V)$ pour tout $x \in E$.

7. En déduire que pour tout $x \in E$, il existe un élément $y \in V$ tel que $d(x, V) = \|x - y\|$.

III — Distance d'un point à un sous-espace de dimension finie dans un espace euclidien

Dans cette partie, on suppose que la norme sur l'espace vectoriel E est définie à partir d'un produit scalaire $< \cdot, \cdot >$ sur E : $\|x\| = \sqrt{< x, x >}$.
Soit V un sous-espace vectoriel *de dimension finie* de E. On admet qu'il existe un unique sous espace vectoriel de E noté $V^\perp$ tel que $V \oplus V^\perp = E$ et $\forall (x, y) \in V \times V^\perp, < x, y >= 0$.
On appelle alors la projection orthogonale de x sur V l'unique élément $\pi(x)$ de V tel que $(x - \pi(x)) \in V^\perp$.

8. **a.** Soit $x \in E$. Soit $y \in V \setminus \{\pi(x)\}$. Montrer que $\|x - y\| > \|x - \pi(x)\|$.

b. En déduire que la projection orthogonale de x sur V est l'unique élément $y \in V$ vérifiant $d(x, V) = \|x - y\|$.

Pour tout suite finie $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n$, on désigne par $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ le déterminant de la *matrice de Gram* d'ordre n définie par :

$$M(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} < x_1, x_1 > & < x_1, x_2 > & \cdots & < x_1, x_n > \\ < x_2, x_1 > & < x_2, x_2 > & \cdots & < x_2, x_n > \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ < x_n, x_1 > & < x_n, x_2 > & \cdots & < x_n, x_n > \end{pmatrix}.$$

9. Montrer que $G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ si et seulement si la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est liée.

10. On suppose que la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est libre et l'on désigne par V l'espace vectoriel qu'elle engendre. Montrer que, pour tout $x \in E$,

$$d(x, V)^2 = \frac{G(x_1, x_2, \ldots, x_n, x)}{G(x_1, x_2, \ldots, x_n)}.$$

IV — Comparaison des normes $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_2$

Pour toute partie A de $C([0,1])$, on note $\overline{A}^\infty$ et $\overline{A}^2$ les adhérences de A pour les normes $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_2$ respectivement. Pour $f \in C([0,1])$, la notation $d(f, A)$ désigne toujours la distance de f à A *relativement à la norme* $\|.\|_2$ (on ne considérera jamais, dans l'énoncé, la distance d'un élément à une partie relativement à la norme $\|.\|_\infty$).

11. Montrer que pour tout $f \in C([0,1])$, $\|.\|_2(f) \leq \|.\|_\infty(f)$.
En déduire que pour toute partie A de $C([0,1])$, on a $\overline{A}^\infty \subset \overline{A}^2$.

On considère l'ensemble $V_0 = \{f \in C([0,1]); f(0) = 0\}$, et on rappelle que ϕ_0 désigne la fonction constante égale à 1.

12. Montrer que $\phi_0 \in \overline{V_0}^2$.

13. En déduire que V_0 est dense dans $C([0,1])$ pour la norme $\|.\|_2$, mais n'est *pas* dense pour la norme $\|.\|_\infty$.

14. Montrer que si V est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé, alors son adhérence $\overline{V}$ est également un espace vectoriel.

15. Montrer qu'un sous-espace vectoriel V de $C([0,1])$ est dense pour la norme $\|.\|_\infty$ si et seulement si pour tout entier $m \geq 0$, $\phi_m \in \overline{V}^\infty$.

16. En déduire qu'un sous-espace vectoriel V de $C([0,1])$ est dense pour la norme $\|.\|_2$ si et seulement si pour tout entier $m \geq 0$, $\phi_m \in \overline{V}^2$.

V — Un critère de densité de W pour la norme $\|.\|_2$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note W_n l'espace vectoriel engendré par la famille finie $(\phi_{\alpha_k})_{0 \leq k \leq n}$.

17. Montrer que l'espace W est dense dans $C([0,1])$ pour la norme $\|.\|_2$ si et seulement si pour tout entier $\mu \geq 0$, $\lim_{n \to +\infty} d(\phi_\mu, W_n) = 0$.

18. Montrer que pour tout $\mu \geq 0$,

$$d(\phi_\mu, W_n) = \frac{1}{\sqrt{2\mu + 1}} \prod_{k=0}^{n} \frac{|\alpha_k - \mu|}{\alpha_k + \mu + 1}$$

19. Montrer que pour tout $\mu \geq 0$, la suite $\left(\frac{|\alpha_k - \mu|}{\alpha_k + \mu + 1}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers 1 si et seulement si la suite $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
(On pourra pour cela étudier les variations de la fonction $x \in [0, \mu] \mapsto \dfrac{\mu - x}{x + \mu + 1}$.)

20. En déduire que l'espace W est dense dans $C([0,1])$ pour la norme $\|.\|_2$ si et seulement si la série $\sum \frac{1}{\alpha_n}$ est divergente.

VI — Un critère de densité de W pour la norme $\|.\|_\infty$

21. Montrer que si W est dense dans $C([0,1])$ pour la norme $\|.\|_\infty$, alors la série $\sum \frac{1}{\alpha_n}$ est divergente.

22. Soit $\psi = \sum_{k=0}^{n} a_k \phi_{\alpha_k}$ un élément quelconque de W_n. Montrer que si $\alpha_k \geq 1$ pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, alors pour tout $\mu \geq 1$, on a :

$$\|(\phi_\mu - \psi)\|_\infty \leq \|\big(\mu\phi_{\mu-1} - \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha_k \phi_{\alpha_k - 1}\big)\|_2.$$

23. On suppose que la suite $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifie les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} (i) : & \alpha_0 = 0 \\ (ii) : & \alpha_k \geq 1 \text{ pour tout } k \geq 1. \end{cases}$$

Montrer que sous ces conditions, si la série $\sum \frac{1}{\alpha_n}$ est divergente, alors W est dense dans $C([0,1])$ pour la norme $\|.\|_\infty$.

24. Montrer que la conclusion précédente est encore valable si on remplace la condition (ii) par la condition plus faible :

$$(ii') : \qquad \inf_{k\geq 1} \alpha_k > 0$$

Fin du problème

DEVOIR SURVEILLÉ n° 4 (4H)

TYPE CCP

Les calculatrices sont interdites

Exercice 1 :

1. Montrer que la fonction sh est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On note argsh sa bijection réciproque.

2. Déterminer l'expression logarithmique de la fonction argsh puis celle de sa dérivée argsh$'$.
'*[On pourra par exemple résoudre l'équation $y = \mathrm{sh}(x)$ pour arriver à l'expression $x = argsh\ (y)$.]*

3. On pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{n(k^2+n^2)}}{n}$. Étudier la nature de (u_n) et déterminer sa limite éventuelle.

Exercice 2 :

1. Rappeler sans démonstration la caractérisation d'une fonction convexe par l'inégalité des pentes (on illustrera par un dessin).

2. En déduire que si f est convexe et majorée sur $\mathbb{R}$, alors f est constante.

Problème :

On désigne par E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
On munit E d'une des deux normes $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ définies par :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \qquad \text{et} \qquad \|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

Pour tout **réel** $a > 0$, on désigne par ϕ_a l'élément de E défini par $\phi_a(x) = \begin{cases} x^a \text{ si } x \in]0,1] \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$

Par exemple, $\phi_{\sqrt{2}}(x) = x^{\sqrt{2}}$.
Par ailleurs, on désigne par ϕ_0 la fonction constante égale à 1 sur $[0,1]$.
Dans ce problème, on envisage une suite $\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de réels positifs deux à deux distincts.
L'objectif est d'établir des conditions nécessaires et/ou suffisantes pour que la famille de fonctions $(\phi_{(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}})$ engendre un espace vectoriel dense dans E pour la norme $\|.\|_2$ et/ou pour $\|.\|_\infty$.

On pourra librement utiliser le théorème de Stone et Weierstrass dans ce problème :
Pour toute fonction $f \in E$, il existe une suite $(P_n)_\mathbb{N}$ de fonctions polynomiales telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f - P_n\|_\infty = 0$.

I — Questions préliminaires

1. Soit $\Psi : \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ l'application qui à une fonction f associe la fonction :

$$\Psi(f) : x \mapsto x \cdot f'(x).$$

Vérifier que Ψ est linéaire et que chaque fonction $\phi_a : a \mapsto x^a$ est un vecteur propre de Ψ.
Préciser la valeur propre associée.

2. Soit $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs ou nuls deux à deux distincts.
Montrer que $(\phi_{\alpha_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille libre de E *(on pourra utiliser la question précédente).*

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Que peut-on dire de la dimension de l'espace vectoriel $F_n = \mathrm{Vect}\left((\phi_{\alpha_k})_{0\le k\le n}\right)$?

4. Quelle est son adhérence $\overline{F_n}$? En déduire que F_n n'est pas dense dans E.

II — Distance d'un point à une partie de E

Soit $f_0 \in E$ et $\|.\|$ une norme sur E. On rappelle que la distance de f_0 à une partie **non vide** A de E est le réel noté $d(f_0, A)$ défini par : $d(f_0, A) = \inf_{a\in A} \|f_0 - a\|$.

5. Montrer que la fonction $d_A : f \mapsto d(f, A)$ est continue.

6. Montrer que $d(f_0, A) = 0$ si et seulement si f_0 est adhérent à A.

7. On suppose que $(A_n)_{n\ge0}$ est une suite croissante de parties de E et on pose $A = \bigcup_{n\ge0} A_n$.

a. Montrer que la suite $(d(f_0, A_n))_\mathbb{N}$ est décroissante et minorée.

b. Montrer que $\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : d(f_0, A_N) \le d(f_0, A) + \varepsilon$.

c. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} d(f_0, A_n) = d(f_0, A)$.

8. On suppose dans cette question que F est un sous-espace vectoriel **de dimension finie** de E, et on note $B = \left\{u \in E; \|f_0 - u\| \le \|f_0\|\right\}$.

a. Montrer que $B \cap F$ est un fermé borné non vide de F puis que $d(f_0, F) = d(f_0, B \cap F)$.

b. En déduire qu'il existe (au moins) un élément $u_0 \in F$ tel que $d(f_0, F) = \|f_0 - u_0\|$.

III — Comparaison des normes N_∞ et N_2

Pour toute partie A de E, on note $\overline{A}^\infty$ et $\overline{A}^2$ les adhérences de A pour les normes $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_2$ respectivement. Pour $f \in E$, la notation $d(f, A)$ désigne toujours la distance de f à A *relativement à la norme* $\|.\|_2$ (on ne considérera jamais, dans ce problème, la distance d'un élément à une partie relativement à la norme $\|.\|_\infty$).

9. Montrer que l'application $\|.\|_2 : f \mapsto \|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$ est une norme sur E.

10. Montrer que pour tout $f \in E$, $\|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$. En déduire que pour toute partie A de E, on a $\overline{A}^\infty \subset \overline{A}^2$.

On considère l'ensemble $V_0 = \left\{f \in E; f(0) = 0\right\}$, et on rappelle que ϕ_0 désigne la fonction constante 1.

11. Montrer que la suite de fonctions $(x \mapsto 1 - (1-x)^n)_{\mathbb{N}^*}$ converge vers $\phi_0 : x \mapsto 1$ pour la norme $\|.\|_2$.

12. En déduire que V_0 est dense dans E pour la norme $\|.\|_2$, mais n'est *pas* dense pour la norme $\|.\|_\infty$.

13. Les normes $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

14. Montrer que si G est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé, alors son adhérence $\overline{G}$ est également un espace vectoriel.

15. Montrer qu'un sous-espace vectoriel G de E est dense pour la norme $\|.\|_\infty$ si et seulement si pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $\phi_k : x \mapsto x^k$ appartient à $\overline{G}^\infty$ (on pourra utiliser le théorème de Stone et Weierstrass).

16. En déduire qu'un sous-espace vectoriel G de E est dense pour la norme $\|.\|_2$ si et seulement si pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $\phi_k \in \overline{G}^2$.

IV — Déterminants de Cauchy

On considère un entier $n > 0$ et deux suites finies $(a_k)_{1\leq k\leq n}$ et $(b_k)_{1\leq k\leq n}$ de réels telles que pour tout couple $(i,j) \in [1,n]^2, a_i + b_j \neq 0$. Le *déterminant de Cauchy* d'ordre m est défini par :

$$D_m = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_m} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_m+b_1} & \frac{1}{a_m+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_m+b_m} \end{vmatrix}.$$

17. Montrer que s'il existe $i \neq j$ tels que $a_i = a_j$ ou bien $b_i = b_j$, alors $D_n = 0$.

On définit la fraction rationnelle : $R(X) = \dfrac{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(X-a_k)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(X+b_k)}$.

18. Montrer que si $R(X)$ est de la forme $R(X) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{c_k}{X+b_k}$ pour des réels c_k, alors $c_n D_n = R(a_n) D_{n-1}$.

[On pourra pour cela considérer le déterminant obtenu à partir de D_n en remplaçant la dernière colonne par $\begin{pmatrix} R(a_1) \\ R(a_2) \\ \vdots \\ R(a_n) \end{pmatrix}$*.]*

19. En déduire que $D_n = \dfrac{\prod\limits_{1\leq i<j\leq n}(a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod\limits_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}(a_i + b_j)}$.

V — Un critère de densité de F_α pour la norme $\|.\|_2$ et une condition nécessaire pour $\|.\|_\infty$.

Soit $f_0 \in E$ et une suite $\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels deux à deux distintcs.
Soit alors F_α l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}((\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}})$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n l'espace vectoriel engendré par la famille finie $(\phi_{\alpha_k})_{0\leq k\leq n}$.

20. Montrer que l'espace F_α est dense dans E pour la norme $\|.\|_2$ si et seulement si pour tout entier $m \geq 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} d(\phi_m, F_n) = 0$.

On admet pour la suite que l'application : $(f,g) \mapsto <f,g> = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|\cdot|g(x)|\mathrm{d}x$ est un produit scalaire sur E.

a. Soient α_i et α_j deux réels positifs. Calculer $< \phi_{\alpha_i}, \phi_{\alpha_j} >$.

Pour une famille $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ de vecteurs de E, on désigne par $G(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ le déterminant d'ordre p égal à :

$$G(e_1,e_2,\ldots,e_p) = \begin{vmatrix} <e_1,e_1> & <e_1,e_2> & \cdots & <e_1,e_p> \\ <e_2,e_1> & <e_2,e_2> & \cdots & <e_2,e_p> \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ <e_n,e_1> & <e_n,e_2> & \cdots & <e_p,e_p> \end{vmatrix}.$$

On admet que pour tout fonction ϕ_m,

$$d(\phi_m, F_n)^2 = \frac{G(\phi_{\alpha_1}, \phi_{\alpha_2}, \ldots, \phi_{\alpha_n}, \phi_m)}{G(\phi_{\alpha_1}, \phi_{\alpha_2}, \ldots, \phi_{\alpha_n})}$$

21. Montrer que pour tout $m \geq 0$, $d(\phi_m, F_n) = \dfrac{1}{\sqrt{2m+1}} \displaystyle\prod_{k=0}^{n} \frac{|\alpha_k - m|}{\alpha_k + m + 1}$.

22. Montrer que pour tout $m \geq 0$, la suite $\left(\dfrac{|\alpha_k - m|}{\alpha_k + m + 1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 1 si et seulement si la suite $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. *[On pourra pour cela étudier les variations de la fonction $x \mapsto \dfrac{m-x}{x+m+1}$ sur $[0,m]$]*

23. En déduire que l'espace F_α est dense dans E pour la norme $\|.\|_2$ si et seulement si la série $\sum \frac{1}{\alpha_n}$ est divergente.

24. Montrer que si F_α est dense dans E pour la norme $\|.\|_\infty$, alors la série $\sum \frac{1}{\alpha_n}$ est divergente.

Fin du problème