DEVOIR SURVEILLÉ n° 3 (4H)

Vendredi 14 octobre 2016

I — L'usage des calculatrices est autorisé

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction, même si tout résultat qui n'est pas explicitement dans le cours de MPSI ou de MP doit être démontré. Si un candidat repére ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Problème

Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. Cet entier est quelconque sauf dans la partie I, où il est égal à 2.
On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, $(E_{i,j})$ sa base canonique ($1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$) et I_n sa matrice unité (tous les coefficients de $E_{i,j}$ sont nuls, sauf celui situé à la i^{e} ligne et à la j^{e} colonne, qui vaut 1).
On note $\mathbb{R}[X]$ l'algèbre des polynômes à coefficients réels.
Dans tout le problème, A est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice A.
Pour tout $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, on note $P(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k A^k$. L'ensemble des matrices $P(A)$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ est noté $\mathbb{R}[A]$.
On dit que P annule A lorsque $P(A) = 0$, ce qui équivaut à $P(u) = 0$. On appelle polynôme minimal de la matrice A le polynôme minimal de l'endomorphisme u ; c'est donc le polynôme unitaire de plus petit degré qui annule A.

On note ϕ_A l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\phi_A(M) = AM - MA$$

L'objet du problème est d'étudier quelques propriétés des éléments propres de ϕ_A. Les parties I et II étudient la diagonalisabilité de ϕ_A, les parties III et IV en étudient les vecteurs propres.
Les quatre parties sont indépendantes.

Partie I. Étude du cas $n = 2$

Dans toute cette partie, on prendra $n = 2$.

1. Vérifier que l'application ϕ_A est linéaire et que I_2 et A appartiennent à $\ker \phi_A$.
Dans la suite de cette partie, on pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Donner la matrice de ϕ_A dans la base $(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{1,2}, E_{2,1})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Dans la suite de cette partie, on suppose que $\phi_A \neq 0$ (c'est-à-dire que $A \neq \lambda I_2$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$).

3. Donner le polynôme caractéristique de ϕ_A sous forme factorisée (on pourra utiliser la calculatrice).

4. En déduire que ϕ_A est diagonalisable si et seulement si $(d-a)^2 + 4bc > 0$.

5. Démontrer que ϕ_A est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

Partie II. Étude du cas général

On note $c = (c_1, \dots, c_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

6. On suppose dans cette question que A est diagonalisable.
On note $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres de u (défini au début du problème) et, pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, λ_i la valeur propre associée au vecteur e_i. On note alors P la matrice de passage de la base c à la base e et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$.
Enfin, pour tout couple (i,j) d'entiers tels que $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$, on pose :

$$B_{i,j} = PE_{i,j}P^{-1}$$

a. Exprimer, pour tout couple (i,j), la matrice $DE_{i,j} - E_{i,j}D$ en fonction de la matrice $E_{i,j}$ et des réels λ_i et λ_j.

b. Démontrer que, pour tout couple (i,j), $B_{i,j}$ est un vecteur propre de ϕ_A.

c. En déduire que ϕ_A est diagonalisable.

7. On suppose dans cette question que ϕ_A est diagonalisable en tant qu'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On note $(P_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ une base de vecteurs propres de ϕ_A et, pour tout couple (i,j), $\lambda_{i,j}$ la valeur propre associée à $P_{i,j}$.

a. Dans cette question, on considère A comme une matrice à coefficients complexes
($A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) et ϕ_A comme un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
(défini par $\phi_A(M) = AM - MA$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$).

i. Justifier que toutes les valeurs propres de ϕ_A sont réelles.

ii. Soit $z \in \mathbb{C}$. Justifier que si z est une valeur propre de A, alors z est aussi une valeur propre de ${}^tA$.

iii. Soit $z \in \mathbb{C}$. On suppose que z et $\overline{z}$ sont deux valeurs propres de la matrice A. On considère alors $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ $(X \neq 0)$ et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ $(Y \neq 0)$ tels que $AX = zX$ et ${}^tAY = \overline{z}Y$.
En calculant $\phi_A\left(X{}^tY\right)$, démontrer que $z - \overline{z}$ est une valeur propre de ϕ_A.

b. En déduire que la matrice A a au moins une valeur propre réelle.
On note λ une valeur propre réelle de A et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ $(X \neq 0)$ une matrice colonne telle que $AX = \lambda X$.

c. Démontrer que, pour tout couple (i, j), il existe un réel $\mu_{i,j}$, que l'on exprimera en fonction de λ et $\lambda_{i,j}$, tel que $AP_{i,j}X = \mu_{i,j}P_{i,j}X$.

d. En déduire que A est diagonalisable.

Partie III. Étude des vecteurs propres de ϕ_A associés à la valeur propre 0

Soit m le degré du polynôme minimal de A.

8. Démontrer que la famille $\left(I_n, A, \ldots, A^{m-1}\right)$ est une base de $\mathbb{R}[A]$.

9. Vérifier que $\mathbb{R}[A]$ est inclus dans $\ker \phi_A$ et en déduire une minoration de $\dim \ker \phi_A$.

10. *Un cas d'égalité*

On suppose que l'endomorphisme u (défini au début du problème) est nilpotent d'indice n (c'est-à-dire que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$). On considère un vecteur y de $\mathbb{R}^n$ tel que $u^{n-1}(y) \neq 0$ et, pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, on pose $e_i = u^{n-i}(y)$.

a. Démontrer que la famille $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

b. Soient $B \in \ker \phi_A$ et v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à B.

Démontrer que si $v(y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ $(\alpha_i \in \mathbb{R})$ alors $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u^{n-i}$.

c. En déduire $\ker \phi_A$.

11. *Cas où u est diagonalisable*

On suppose que u est diagonalisable. On note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ $(1 \leq p \leq n)$ les p valeurs propres distinctes de u et, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, $E_u(\lambda_k)$ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_k. On note m_k la dimension de cet espace propre.

a. Soient $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à B. Démontrer que $B \in \ker \phi_A$ si et seulement si, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, $E_u(\lambda_k)$ est stable par v (c'est-à-dire $v(E_u(\lambda_k)) \subset E_u(\lambda_k)$).

b. En déduire que $B \in \ker \phi_A$ si et seulement si la matrice de v, dans une base adaptée à la décomposition de $\mathbb{R}^n$ en somme directe des sous-espaces propres de u, a une forme que l'on précisera.

c. Préciser la dimension de $\ker \phi_A$.

d. Lorsque $n = 7$, donner toutes les valeurs possibles pour cette dimension en envisageant les différentes valeurs possibles de p et des m_k (on ne demande pas de justification).

Partie IV. Étude des vecteurs propres de ϕ_A associés à une valeur propre non nulle

Dans cette partie, α est une valeur propre non nulle de ϕ_A et B un vecteur propre associé ($B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \neq 0$). On note π_B le polynôme minimal de B et d le degré de π_B.

12. Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\phi_A\left(B^k\right) = \alpha k B^k$.

13. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Exprimer $\phi_A(P(B))$ en fonction de α, B et $P'(B)$.

14. Démontrer que le polynôme $X\pi'_B - d\pi_B$ est le polynôme nul (π'_B étant le polynôme dérivé du polynôme minimal de la matrice B).

15. En déduire que $B^d = 0$.

Exercice

On désigne par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit n un entier naturel non nul et $E = \mathbb{K}^n$.
Pour tout endomorphisme u de E, on désigne par $Ker(u)$ le noyau de u et par $Im(u)$ l'image de u.

1. Soient u et v deux endomorphismes qui commutent. Démontrer que $Ker(u)$ et $Im(u)$ sont stables par v.

Dans la suite, u désigne un endomorphisme de E tel que $u^2 = 0$.

2. Démontrer que $Im(u)$ est contenu dans $Ker(u)$.

3. Quelle inégalité obtient-on ainsi sur le rang de u ? On citera précisément le théorème utilisé avec toutes ses hypothèses.

4. On suppose uniquement dans cette question **4.** que $n = 2$, soit $E = \mathbb{K}^2$.
On suppose aussi u non nul.

a. Démontrer qu'il existe une droite D dans E telle que $Ker(u) = Im(u) = D$.

b. Soit v un endomorphisme de E tel que $v^2 = 0$ et $u \circ v = v \circ u$.

i. Démontrer que $v(D) \subset D$.

ii. Démontrer que $u \circ v = 0$.

c. Soient v et w deux endomorphismes de E tels que $v^2 = 0$ et $w^2 = 0$, $u \circ v = v \circ u$ et $u \circ w = w \circ u$.
Démontrer que $v \circ w = 0$.

5. On revient au cas général. Soit m un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soient $u_1, \ldots u_m$ des endomorphismes de E tels que :

$$\forall (i,j) \in \{1, \ldots m\}^2, u_i^2 = 0 \text{ et } u_i \circ u_j = u_j \circ u_i.$$

On pose $F_1 = Im(u_1)$ et pour tout entier $i \in [2, m]$, $F_i = Im(u_1 \circ u_2 \circ \ldots \circ u_{i-1} \circ u_i)$.

a. Démontrer que pour tout entier i compris entre 1 et $m - 1$, F_i est un sous espace vectoriel stable par u_{i+1}.

b. En déduire que pour tout entier i compris entre 1 et m, F_i est de dimension au plus $\dfrac{n}{2^i}$.

c. Dans le cas où $n < 2^m$, démontrer que l'endomorphisme $u_1 \circ u_2 \circ \ldots \circ u_m = 0$.