DEVOIR SURVEILLÉ n° 9 (4H)

Exercice 1 :

On considère une suite infinie de lancers d'une pièce équilibrée. Alice et Bob s'affrontent dans un jeu dont les règles sont les suivantes :

— Alice est gagnante si la configuration "Pile, Pile, Face" apparaît dans la suite des résultats des lancers avant que la configuration "Face, Pile, Pile" n'apparaisse (éventuellement) ;

— Bob est gagnant si la configuration "Face, Pile, Pile" apparaît dans la suite des résultats des lancers avant que la configuration "Pile, Pile, Face" n'apparaisse (éventuellement) ;

— si l'un des joueurs est gagnant, l'autre est dit perdant.

On note P_k l'événement "on obtient Pile au k-ième lancer".

On se propose de déterminer lequel des deux joueurs a le plus de chances de gagner.

1. Pour tout $n \geq 3$, on note A_n l'événement "Alice est déclarée gagnante à l'issue du n-ième lancer" et a_n la probabilité de A_n.

a. Exprimer A_3 et A_4 en fonction des (P_k) puis calculer a_3 et a_4 et montrer que

$$\forall n \geq 3, a_n = \frac{1}{2^n}.$$

b. Traduire en langage de probabilités puis déterminer la probabilité de l'événement

"Alice est gagnante."

2. Pour tout $n \geq 1$, on note c_n la probabilité de l'événement

C_n : "lors des n premiers lancers n'apparaissent jamais deux piles consécutifs".

a. Traduire C_1 et C_2 en langage de probabilités puis calculer c_1 et c_2.

b. En considérant les résultats des deux premiers lancers, montrer que pour $n \geq 1$,

$$c_{n+2} = \frac{1}{2}c_{n+1} + \frac{1}{4}c_n.$$

c. En déduire que (c_n) est convergente et déterminer la limite de (c_n).

3. a. On définit pour $n \geq 2$, l'événement

D_n : "aucun joueur n'est encore déclaré gagnant à l'issue du n-ième lancer".

Montrer que

$$\forall n \geq 2, P(D_n) - \frac{1}{2^n} = c_n.$$

b. En déduire que l'événement "Un des deux joueurs est gagnant" est presque sûr.

4. Conclure.

Exercice 2 :

1. Justifier que la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
Dans la suite de cet exercice, on se propose de calculer :

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

2. Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \text{ et } g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt.$$

a. Démontrer que les fonctions f et g sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer leur dérivée.

b. Prouver que pour tout x réel positif, on a : $f(x) = \displaystyle\int_0^1 xe^{-x^2t^2} dt$.
En déduire que la fonction $\varphi = g + f^2$ est constante de valeur $\dfrac{\pi}{4}$.

c. Démontrer que pour tout $x \geq 0$ réel, on a : $0 \leq g(x) \leq e^{-x^2}$.

d. En déduire la valeur de I.

Exercice 3 :

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum \frac{(-x)^n}{3n+1}$

2. a. Calculer pour n entier naturel la valeur de

$$\int_0^1 t^{3n} \, dt$$

b. En déduire, en justifiant avec soin la permutation des symboles Σ et $\int$, la valeur de la somme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{3n+1}$$

lorsque $x \in]-R, R[$.
Il pourra être utile pour les calculs de poser $a = \sqrt[3]{x}$.

3. Montrer que la série

$$\sum \frac{(-1)^n}{3n+1}$$

est convergente et calculer sa somme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}.$$

Exercice 4 :

On s'intéresse ici à l'ensemble S des fonctions $y \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ solutions de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R} \ , \ y''(t) - y(t) = \frac{1}{\text{ch}(t)}$$

On admet que cet ensemble est formé des fonctions y du type :

$$y : t \mapsto t \cdot \text{sh}(t) - \text{ch}(t) \ln(\text{ch}(t)) + a \cdot \text{ch}(t) + b \cdot \text{sh}(t)$$

1. a. Existe-t-il des solutions impaires dans S ?

b. Expliciter l'unique solution $\theta \in S$ paire telle que $\theta(0) = 1$.

2. Donner sans démonstration le développement en série entière de la fonction ch en précisant son rayon de convergence : $\text{ch}(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^{2k}$

3. a. Montrer l'existence et l'unicité d'une unique suite réelle (que l'on ne cherchera pas à déterminer explicitement mais que l'on définira par récurrence) $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que

$$b_0 a_0 = 1 \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}^* \ \sum_{k=0}^{n} b_k a_{n-k} = 0$$

b. Préciser b_0, b_1 et b_2.

c. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} \ , \ |b_n| \leq 1$
On pourra considérer comme connu que $ch(1) \leq 2$.

d. En déduire que pour $t \in]-1, 1[$ la série de somme $g(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^{2n}$ converge absolument avec de plus $\text{ch}(t).g(t) = 1$. Conclure que $t \mapsto \dfrac{1}{\text{ch}(t)}$ est développable en série entière sur $]-1, 1[$.

4. On suppose qu'il existe une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $u_0 = 1$ telle que la série entière définie par

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n t^{2n}$$

ait un rayon de convergence $R \geq 1$ et vérifie

$$\forall t \in]-1, 1[\ , \ y''(t) - y(t) = \frac{1}{\text{ch}(t)}$$

a. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ une relation entre u_{n+1} , u_n et b_n.
b. En déduire qu'une telle suite est unique et montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} \ , \ |u_n| \leq 1$.
c. En déduire que la fonction θ est développable en série entière sur l'intervalle $]-1, 1[$.
d. Justifier que $x \mapsto \ln(\text{ch}(x))$ est développable en série entière sur l'intervalle $]-1, 1[$.

Exercice 5 :

1. Quelle est la période de la fonction tan ? Représenter la fonction tan sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

2. Démontrer l'existence d'une suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que ;

— $T_0(X) = X$

— pour tout naturel n, $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan^{(n)}(x) = T_n(\tan(x))$ où $\tan^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de la fonction tan.

On explicitera une relation de récurrence vérifiée entre T_n et T_{n+1}.

3. Expliciter les polynômes T_1, T_2, T_3.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que les coefficients du polynôme T_n sont des entiers naturels. Quel est le degré du polynôme T_n ?

5. Justifier qu'il existe une unique suite de nombres entiers naturels $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\ , \tan(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{t_j}{(2j+1)!} x^{2j+1} + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} T_{2n+2}(\tan(t)) \, dt$$

On citera précisément le théorème utilisé.

Dans la suite on notera I un intervalle ouvert symétrique par rapport à 0 et f de classe C^∞ de I dans $\mathbb{R}$. On note

$$\forall x \in I \ , R_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1} \, dt$$

On suppose aussi que f est impaire et que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in I$, $f^{(n)}(x) \geq 0$.

6. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in I$, $R_n(x) = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + R_{n+1}(x)$.

7. Soit $b \in I$ tel que $b > 0$.

a. Montrer que la suite $(R_n(b))_{n\geq 1}$ est convergente.

b. Soient $x \in [0, b]$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

i. Justifier $R_n(x) = \dfrac{x^n}{(n-1)!} \displaystyle\int_0^1 f^{(n)}(tx)(1-t)^{n-1} \, dt$.

ii. En déduire que $0 \leq R_n(x) \leq \dfrac{x^n}{(n-1)!} \displaystyle\int_0^1 f^{(n)}(tb)(1-t)^{n-1} \, dt$.

iii. Démontrer que $R_n(x) \leq \left(\dfrac{x}{b}\right)^n R_n(b)$.

c. En déduire que $\forall x \in]-b, b[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

8. Démontrer $\forall x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\tan(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t_n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$.

9. Que peut-on dire du rayon de convergence de cette série entière ?

Des corrigés

Exercice 2 : d'après E3a MP 2009 B.

1) On applique la règle de d'Alembert :
Comme $\frac{3n+4}{3n+1} \to 1$ on en déduit que $R = 1$.

2) a) On a

$$\int_0^1 t^{3n}\ dt = \frac{1}{3n+1}$$

b) On fixe $x \in]-1,1[$ et on pose pour $t \in [0,1]$,

$$u_n(t) = (-x)^n t^{3n}$$

Les fonctions u_n sont continues par morceaux, et la série converge simplement avec pour somme

$$s(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n t^{3n} = \frac{1}{1+xt^3}$$

s est bien continue sur $[0,1]$.

Reste à vérifier l'hypothèse de domination.

Pour tout naturel N

$$\left|\sum_{n=0}^{N} u_n(t)\right| = \left|\frac{1-(-xt^3)^{N+1}}{1+xt^3}\right| \leq \frac{2}{1+xt^3}$$

qui est bien une fonction continue par morceaux et intégrable sur $[0,1]$ (puisqu'elle y est continue).

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 u_n(t) = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)$$

donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{3n+1} = \int_0^1 \frac{dt}{1+xt^3}$$

Reste à calculer l'intégrale...

On pose $a = \sqrt[3]{x}$ et on décompose en éléments simples

$$\frac{1}{1+xt^3} = \frac{1}{3}\frac{1}{1+at} - \frac{1}{6a}\frac{2a^2t-1}{1-at+a^2t^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{\left(at-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

et donc

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+xt^3} = \frac{1}{3a}\ln(1+a) - \frac{1}{6a}\ln(1-a+a^2) + \sqrt{3}(\arctan(\frac{\sqrt{3}}{3}(2a-1)) + \frac{\pi}{6})$$

3) La série

$$\sum \frac{(-1)^n}{3n+1}$$

est convergente par le théorème spécial des séries alternées.

De plus si $x \in [0,1]$ la série $\sum \frac{(-x)^n}{3n+1}$ est aussi alternée donc on peut majorer son reste en module par $\frac{x^{n+1}}{3n+4}$ donc par $\frac{1}{3n+4}$.
Il y a donc convergence uniforme de la série, donc la somme est continue, donc la valeur en 1 est la limite de la valeur trouvée au 2) :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \lim_{x\to 1} \int_0^1 \frac{dt}{1+xt^3} = \frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$$

Exercice 3 : d'après E3a PC 2010 B.

1) a) Pour montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\sin(3x) = -4\sin^3(x) + 3\sin(x)$$

deux méthodes :
soit on écrit que

$$\sin(3x) = Im(e^{3ix}) = Im((cos(x) + i\sin(x))^3)$$

et on développe par la formule du binôme, soit on écrit

$$\sin(3x) = \sin(2x + x)$$

et on développe par les formules de trigo.

b) Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\sin(x)}{x^2} - \frac{1}{x} \end{array}$$

i) En écrivant un DL à l'ordre 2 de sin , $\sin(x) = x + o(x^2)$ il est clair que f a pour limite 0 en 0 donc que la fonction f admet un prolongement par continuité sur $\mathbb{R}$ φ vérifiant $\varphi(0) = 0$.

ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a

$$\varphi(x) = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n+1)!}$$

Comme ceci est vrai aussi pour $x = 0$ on en déduit que φ admet un développement en série entière avec rayon infini.

iii) φ est donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ car somme d'une série entière de rayon infini.

2) On pose

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(x)}{x^2}\ dx$$

a) Posons pour $x \in]0, +\infty[$, $f(x) = \frac{\sin^3(x)}{x^2}\ dx$.
Cette fonction est continue.

En 0 elle est prolongeable par continuité donc intégrable.
En $+\infty$ on la majore en module par $\frac{1}{x^2}$ qui est intégrable sur $[1,+\infty[$ donc f aussi.
Donc I existe.

b) Pour tout $a>0$ on pose

$$I(a)=\int_a^{+\infty}\frac{\sin^3(x)}{x^2}\,dx$$

i) Les deux intégrales considérées sont bien définies car la fonction est continue sur l'intervalle semi-ouvert et les deux fonctions dominées en module en l'infini par $\frac{1}{x^2}$ qui est intégrable sur $[1,+\infty[$.
On pose $x=\frac{t}{3}$ dans la première (changement de variable de classe C^1 bijectif et strictement croissant) et on obtient l'égalité.

$$\int_a^{+\infty}\frac{\sin(3x)}{x^2}\,dx=3\int_{3a}^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x^2}\,dx$$

ii) Le résultat du 1) a) montre que

$$I(a)=\int_a^{+\infty}\frac{\frac{3}{4}\sin(x)-\frac{1}{4}\sin(3x)}{x^2}\,dx=\ \frac{3}{4}\int_a^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x^2}\,dx-\frac{1}{4}\int_a^{+\infty}\frac{\sin(3x)}{x^2}\,dx=\frac{3}{4}\int_a^{3a}\frac{\sin(x)}{x^2}\,dx$$

grace à la question précédente.

On en déduit

$$I(a)=\frac{3}{4}\int_a^{3a}\varphi(x)+\frac{1}{x}\,dx=\frac{3}{4}\int_a^{3a}\varphi(x)+\frac{3}{4}\ln(3)$$

iii) Par définition de I, I est la limite quand $a\to 0$ de $I(a)$.
φ étant continue sur $\mathbb{R}$ elle possède une primitive F continue sur $\mathbb{R}$ et comme

$$I(a)=\frac{3}{4}(F(3a)-F(a))+\frac{3}{4}\ln(3)$$

on en déduit à la limite

$$I=\frac{3}{4}\ln(3)$$

Exercice 4 : d'après E3a PC 2013 A.

On s'intéresse ici à l'ensemble S des fonctions $y\in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ solutions de l'équation différentielle

$$\forall t\in\mathbb{R}\ ,\ y''(t)-y(t)=\frac{1}{\mathrm{ch}(t)}$$

On admet que cet ensemble est formé des fonctions y du type :

$$y:t\mapsto t\mathrm{sh}(t)-\mathrm{ch}(t)\ln(\mathrm{ch}(t))+a\mathrm{ch}(t)+b\mathrm{sh}(t)$$

1) a) On a obtenu y comme somme d'une fonction paire $t\mapsto t\ \mathrm{sh}(t)-\mathrm{ch}(t)\ln(\mathrm{ch}(t))+a\ \mathrm{ch}(t)$ (qui n'est jamais la fonction nulle) et d'une fonction impaire $t\mapsto b\ \mathrm{sh}(t)$. Elle ne peut donc pas être impaire.

1) b) y est paire si et seulement si $b = 0$. Elle vérifie $y(0) = 1$ si et seulement si $a = 1$. Il y a donc une unique fonction θ définie par $\theta(t) = t\ \mathrm{sh}(t) - \mathrm{ch}(t)\ln(\mathrm{ch}(t)) + \mathrm{ch}(t)$.

2) Le DSE de est connu : $a_k = \frac{1}{(2k)!}$.

3) a) Puisque $a_0 = 1$ on a $b_0 = 1$ et pour $n \geq 0$, $b_n = -\sum_{k=0}^{n-1} b_k a_{n-k}$ donc la suite (b_n) est définie de manière unique par récurrence.

3) b) $b_0 = 1$, $b_1 = -b_0 a_1 = -\frac{1}{2}$, $b_2 = -b_0 a_2 - b_1 a_1 = -\frac{1}{24} + \frac{1}{4} = \frac{5}{24}$.

3) c) $|b_0| = 1$. Supposons $|b_k| \leq 1$ pour $0 \leq k \leq n-1$.
On en déduit $|b_n| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |b_k||a_{n-k}| \leq \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k} \leq \sum_{j=1}^{+\infty} a_j = \mathrm{ch}(1) - 1 \leq 1$ puisque $\mathrm{ch}(1) \leq 2$. On a montré la propriété pour n. L'inégalité est démontrée par récurrence.

3) d) $|b_n t^{2n}| \leq t^{2n}$ donc la série définissant $g(t)$ converge absolument pour $|t| < 1$.
Pour $|t| < 1$ la série entière produit de Cauchy des deux séries $(\sum a_n t^{2n})$ et $(\sum b_n t^{2n})$ converge. Son terme général est donné par $c_n = \sum_{k=0}^{n} b_k a_{n-k} = 0$ si $n \geq 1$ et $c_0 = a_0 b_0 = 1$. On en déduit que $\mathrm{ch}(t) g(t) = 1$ pour $|t| < 1$.

4) a) Pour $|t| < 1 \leq R$ on peut écrire $f''(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2n(2n-1) u_n t^{2n-2}$. Après avoir changé n en $n+1$ on obtient par unicité des coefficients d'un DSE : $(2n+2)(2n+1)u_{n+1} - u_n = b_n$.

4) b) Puisque $u_0 = 1$ la suite (u_n) est définie de manière unique par récurrence.

On a $|u_0| = 1$. Supposons $|u_n| \leq 1$. On en déduit $|u_{n+1}| = \frac{|u_n + b_n|}{(2n+2)(2n+1)} \leq \frac{2}{(2n+2)(2n+1)} \leq 1$ puisque $|u_n| \leq 1$ et $|b_n| \leq 1$. On a démontré la majoration par récurrence.

4) c) Définissons la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{u_n + b_n}{(2n+2)(2n+1)}$. Puisqu'elle vérifie $|u_n| \leq 1$ pour tout $n \geq 0$ la série entière définie par $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n t^{2n}$ a un rayon de convergence $R \geq 1$. La fonction f vérifie alors $f''(t) - f(t) = \frac{1}{\mathrm{ch}(t)}$ d'après le calcul fait au 4)a)

De plus $f(0) = u_0 = 1$ et f est paire. f est donc égale à l'unique solution de S, paire et telle que $f(0) = 1$, donc $f = \theta$. On a bien montré que θ possède un DSE sur $]-1, 1[$.

4) d) Puisque $\theta(t) = t\ \mathrm{sh}(t) - \mathrm{ch}(t)\ln(\mathrm{ch}(t)) + \mathrm{ch}(t)$ on déduit pour $|t| < 1$: $\ln(\mathrm{ch}(t)) = g(t)(t\ \mathrm{sh}(t) - \theta(t)) + 1$. comme les fonctions g, sh et θ possèdent un DSE sur $]-1, 1[$ on en déduit que $\psi : t \mapsto \ln(\mathrm{ch}(t))$ possède un DSE sur $]-1, 1[$ (car le produit de deux fonctions ayant un DSE possède aussi un DSE).

Exercice 5 :

1) La fonction tan a pour période π puisque son ensemble de définition est invariant par $x \mapsto x + \pi$ et que $\tan(x + \pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x)$.

2) La fonction tan est strictement croissante et impaire sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et elle a pour limite $+\infty$ en $\frac{\pi}{2}$. La stricte croissance de tan sur $]-\pi/2, \pi/2[$ montre que π est la plus petite période positive de tan.

3) Démontrons par récurrence sur n l'existence de la suite (T_n).

$\tan^{(0)}(x) = \tan x = T_0(\tan x)$ en posant $T_0(X) = X$.
Supposons pour un entier n l'existence d'un polynôme T_n vérifiant $\tan^{(n)}(x) = T_n(\tan x)$.
En dérivant la fonction composée on obtient : $\tan^{(n+1)}(x) = T_n'(\tan x)(1 + \tan^2(x))$.
En posant $T_{n+1} = (1 + X^2)T_n'$ on obtient $\tan^{(n+1)}(x) = T_{n+1}(\tan x)$ où T_{n+1} est un polynôme.
La propriété est bien démontrée par récurrence.

4) $T_1 = 1 + X^2$, $T_2 = (1 + X^2) \times 2X = 2X^3 + 2X$ et $T_3 = (1 + X^2) \times (6X^2 + 2) = 6X^4 + 8X^2 + 2$.

5) On démontre par récurrence sur n que T_n est un polynôme de degré $n + 1$ à coefficients dans $\mathbb{N}$.
C'est vrai pour $n = 0$ puisque $T_0 = X$ a pour degré 1.
Supposons le vrai pour un entier n. De $T_{n+1} = (1 + X^2)T_n'$ on déduit que T_{n+1} est un polynôme à coefficients entiers (T_n' l'étant) et qu'il a pour degré $n + 2$ (le degré de T_n' est $n + 1 - 1 = n$). On a bien démontré la propriété par récurrence.

6) Appliquons la formule de Taylor avec reste intégral :
si f est de classe C^{N+1} sur $[a, b]$ alors $f(b) = \sum_{k=0}^{N} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^N}{N!} f^{(N+1)}(t)\ dt$.
Prenons $f = \tan$, $a = 0$, $b = x$ et $N = 2n + 1$. La fonction tan étant impaire, ses dérivées d'ordre pair sont aussi des fonction impaires et donc s'annulent en 0. On obtient bien la formule demandée en posant $t_j = \tan^{(2j+1)}(0)$ et en utilisant $f^{(2n+2)}(t) = T_{2n+2}(\tan t)$.

7) On effectue une intégration par parties sur $[0, x] \subset I$:

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\ dt = \left[-\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t) \right]_0^x + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ dt = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + R_{n+1}(x)$$

8) a) Puisque $f^{(n)} \geq 0$ et $b > 0$ (donc $b - t \geq 0$), la suite $(R_n(b))$ est positive. De plus $R_{n+1}(b) = R_n(b) - \frac{b^n}{n!} f^{(n)}(0) \leq R_n(b)$. La suite est décroissante, minorée par 0 donc elle converge.

8) b) i) En effectuant le changement de variable défini par $t = xu$ on obtient :
$R_n(x) = \int_0^1 \frac{(x-xu)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(xu) x\ du = \frac{x^n}{(n-1)!} \int_0^1 (1-u)^{n-1} f^{(n)}(xu)\ du$.

ii) On sait déjà que $R_n(x) \geq 0$ puisque $x \geq 0$. Comme $f^{(n+1)} \geq 0$, la fonction $f^{(n)}$ est croissante donc $f^{(n)}(ux) \leq f^{(n)}(ub)$ et puisque $1 - u \geq 0$ et $x \geq 0$ on obtient bien la majoration demandée.

iii) Avec i. et ii. on obtient

$$R_n(x) \leq \left(\frac{x}{b}\right)^n \frac{b^n}{(n-1)!} \int_0^1 (1-u)^{n-1} f^{(n)}(tb)\ t = \left(\frac{x}{b}\right)^n R_n(b)$$

c) Appliquons à nouveau la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n pour la fonction f sur l'intervalle $[0, x]$ (avec $x > 0$).
$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + R_{n+1}(x)$ et puisque $0 \leq R_n(x) \leq \left(\frac{x}{b}\right)^n R_n(b)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ (car $0 < \frac{x}{b} < 1$) on obtient bien $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.
Puisque f est impaire, les $f^{(2n)}(0)$ sont nuls et l'égalité s'étend donc aux x dans $]-b, 0[$ par imparité des deux membres de l'égalité.

9) La fonction tan vérifie les conditions demandées pour f : elle est de classe C^∞ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan^{(n)}(x) = T_n(\tan(x)) \geq 0$ puisque T_n est à coefficients dans $\mathbb{N}$ et $\tan(x) \geq 0$. Pour tout

$x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ on peut trouver un $b \in \left]x, \frac{\pi}{2}\right[$ et le résultat du I B.8.(c) s'applique. Avec $\tan^{(2n)}(0) = 0$ et en posant $t_n = \tan^{(2n+1)}(0)$ on obtient le résultat demandé.

10) D'après la question précédente le rayon de convergence est au moins égal à $\frac{\pi}{2}$. Mais s'il était supérieur à $\frac{\pi}{2}$, la fonction tangente aurait une limite finie en $\frac{\pi}{2}$, ce qui est faux. Le rayon de convergence est donc égal à $\frac{\pi}{2}$.