DS9

Problème 1

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On note $\mathcal{M}_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées à n lignes et n colonnes et à coefficients réels.
Dans tout ce problème 1, une matrice de $\mathcal{M}_n$ est dite $\mathbb{R}$-diagonalisable si elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
D_n désigne l'ensemble des matrices $\mathbb{R}$-diagonalisables de $\mathcal{M}_n$, $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n$, et $\mathcal{A}_n$ celui des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n$.

Question de cours : Donner sans démonstration les dimensions des espaces vectoriels $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$.

Partie 1

On prend dans cette partie $n = 2$.

Q.1. En déduire un sous-espace vectoriel de dimension 3 de $\mathcal{M}_2$ constitué de matrices $\mathbb{R}$-diagonalisables.

Q.2. En déduire la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2$ contenu dans D_2.

Q.3. D_2 est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2$? Justifier. *On pourra utiliser des arguments de dimension.*

Q.4. Déterminer alors tous les sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2$ contenant D_2.

Q.5. Soient $\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid (a-d)^2 + 4bc > 0 \right\}$ et $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid (a-d)^2 + 4bc \geqslant 0 \right\}$.

- **a.** Montrer que Ω est un ouvert de $\mathcal{M}_2$ et F un fermé de $\mathcal{M}_2$.
- **b.** Prouver que l'on a : $\Omega \subset \mathrm{D}_2 \subset F$.
- **c.** D_2 est-il un fermé de $\mathcal{M}_2$? un ouvert de $\mathcal{M}_2$? Justifier.

Partie 2

On revient au cas général avec $n > 2$.

Q.6. Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n$ définies par :

- $a_{1,1} = a_{1,2} = 1$, $a_{2,2} = -1$ et $a_{i,j} = 0$ sinon,
- $b_{1,1} = -1$, $b_{1,2} = b_{2,2} = 1$ et $b_{i,j} = 0$ sinon.

- **a.** Vérifier que A et B sont $\mathbb{R}$-diagonalisables.
- **b.** D_n est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n$? Justifier.

Q.7. Soit $N \in \mathcal{M}_n$, antisymétrique.
Démontrer que l'ensemble des valeurs propres réelles de N est inclus dans $\{0\}$.
On pourra calculer le produit matriciel ${}^tXNX$ pour un vecteur X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Q.8. Soit S un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n$ contenu dans D_n. Déterminer $S \cap \mathcal{A}_n$.
En déduire la dimension maximale d'un tel sous-espace vectoriel S. On donnera un exemple d'un sous-espace réalisant cette condition.

Q.9. Soit une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

On note f_P l'application linéaire qui à une matrice $M \in \mathcal{M}_n$ associe la matrice $P^{-1}MP$.

a. Vérifier que f_P est un automorphisme de $\mathcal{M}_n$ et expliciter f_P^{-1}.

En déduire la dimension de $\mathcal{S}_P = f_P(\mathcal{S}_n)$.

b. Prouver que l'on a : $\mathcal{S}_P \subset \mathrm{D}_n$.

c. Démontrer enfin que : $\mathrm{D}_n = \displaystyle\bigcup_{P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})} \mathcal{S}_P$.

Q.10. On note $\left(E_{i,j}, (i,j) \in [1,n]^2\right)$ la base canonique de $\mathcal{M}_n$ où $E_{i,j}$ est la matrice de $\mathcal{M}_n$ dont tous les coefficients sont nuls excepté celui de la ligne i et colonne j qui vaut 1.

a. Donner sans démonstration une base β_1 de $\mathcal{S}_n$.

b. Pour tout couple (i,j) de $[1,n]^2$ où $i < j$, on pose $T_{i,j} = 4E_{j,i} + E_{i,j}$.

Soit P la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont $(1, \ldots, 1, 2, 1, \ldots, 1)$ où le 2 est à la j-ème position.

Décomposer la matrice $P^{-1}T_{i,j}P$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_n$. *On pourra utiliser l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à $T_{i,j}$.*

Justifier alors que la matrice $T_{i,j}$ est diagonalisable.

c. Soit $\mathcal{T} = \mathrm{Vect}\,(T_{i,j}, (i,j) \in [1,n]^2, i < j)$. Prouver que $\mathcal{M}_n = \mathcal{T} \oplus \mathcal{S}_n$.

En déduire une base de $\mathcal{M}_n$ constituée de matrices toutes $\mathbb{R}$-diagonalisables.

d. Déterminer enfin tous les sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n$ contenant D_n.

Problème 2

Partie 1 : convergence dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose qu'il existe une norme $\|.\|$ sur E telle que l'inégalité suivante soit satisfaite pour tout $x \in E$,

$$\|u(x)\| \leqslant \|x\|$$

Pour tout entier naturel k non nul, on considère l'endomorphisme

$$r_k = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} u^l = \frac{1}{k}(I_E + u + u^2 + \cdots + u^{k-1})$$

où I_E représente l'endomorphisme identité de E.

Q.1. Soit $x \in \mathrm{Ker}\,(u - I_E)$. Déterminer $\lim_{k\to+\infty} r_k(x)$.

Q.2. Soit $x \in \mathrm{Im}(u - I_E)$. Montrer que $\lim_{k\to+\infty} r_k(x) = 0_E$.

Q.3. En déduire que $E = \mathrm{Ker}\,(u - I_E) \oplus \mathrm{Im}(u - I_E)$.

Q.4. Soit x un vecteur quelconque. Montrer que la suite $(r_k(x))_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un vecteur de E, que l'on notera $p(x)$. Interpréter géométriquement l'application $p\ :\ E \to E$ ainsi définie.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels. On suppose qu'il existe une norme, aussi notée $\|\cdot\|$ sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ identifié à $\mathbb{R}^n$, telle que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on ait $\|AX\| \leqslant \|X\|$. Pour tout k entier naturel non nul, on considère la matrice

$$R_k = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} A^l = \frac{1}{k}(I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}) \tag{2}$$

où I_n est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q.5. Montrer que la suite de matrices $(R_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers une matrice P, telle que $P^2 = P$.

Partie 2 : matrices stochastiques

On fixe dans cette partie un entier $n \geqslant 2$.

Définition 1 *On notera $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la matrice colonne dont tous les coefficients valent* 1.

Définition 2 *Une matrice carrée $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite* **stochastique** *si elle vérifie les conditions suivantes :*

$$\forall (i,j) \in [|1,n|]^2,\ \ a_{i,j} \geqslant 0 \tag{3}$$

$$\forall i \in [|1,n|],\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1 \tag{4}$$

Nous dirons aussi qu'une matrice ligne $L = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ est stochastique lorsque ses coefficients λ_i sont tous positifs ou nuls, et de somme égale à 1.

Q.6. Vérifier que la condition (4) équivaut à la condition $AU = U$.

Q.7. En déduire que l'ensemble $\mathcal{E}$ des matrices stochastiques (carrées d'ordre n) est stable pour le produit matriciel.

Q.8. Montrer que cet ensemble $\mathcal{E}$ est une partie fermée et convexe de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On munit l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de la norme $\|.\|_\infty$ définie par $\|X\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$ où les x_i sont les coefficients de X.

Q.9. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique, alors on a $\|AX\|_\infty \leqslant \|X\|_\infty$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Dans les question suivantes, on note $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique, et on suppose qu'il existe un entier naturel non nul p tel que A^p ait tous ses coefficients strictement positifs. Pour tout k entier naturel non nul, on posera

$$R_k = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} A^l$$

Q.10. Montrer que Ker $(A^p - I_n)$ est de dimension 1.
Indication : soit $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in$ Ker $(A^p - I_n)$, soit $s \in [|1,n|]$ un indice tel que $x_s = \max_{1\leqslant j\leqslant n} x_j$, on montrera que $x_j = x_s$ pour tout j.

Q.11. En déduire que Ker $(A - I_n) = \mathrm{Vect}(U)$.

Q.12. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la matrice R_k est stochastique.

Q.13. Montrer que la suite $(R_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers une matrice P, stochastique de rang 1.

Q.14. En déduire que l'on peut écrire $P = UL$, où $L = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est une matrice ligne stochastique.

Q.15. Montrer que $PA = P$. En déduire que L est la seule matrice ligne stochastique vérifiant $LA = L$.

Q.16. Montrer que les coefficients de la matrice ligne L sont tous strictement positifs.

Q.17. Montrer que le réel 1 est valeur propre simple de A.

Exercice 3

Question de cours : On a $\dim(\mathcal{S}_n) = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\dim(\mathcal{A}_n) = \frac{n(n-1)}{2}$.

Partie 1

1. $\boxed{\text{Le sous-espace } \mathcal{S}_2}$ de $\mathcal{M}_2$ est de dimension 3 (question de cours) et constitué de matrices diagonalisables d'après le théorème spectral.

2. On vient de voir que D_2 contient un sous-espace de $\mathcal{M}_2$ de dimension 3, et il n'en contient pas de dimension 4 puisque le seul sous-espace de $\mathcal{M}_2$ de dimension 4 est $\mathcal{M}_2$, et ce dernier n'est pas inclus dans D_2 (par exemple la matrice élémentaire $E_{1,2}$ de $\mathcal{M}_2$ n'est pas diagonalisable, puisqu'elle a pour unique valeur propre 0 sans être la matrice nulle). Donc la dimension maximale d'une sous-espace de $\mathcal{M}_2$ inclus dans D_2 $\boxed{\text{est égale à 3.}}$

3. *Méthode 1.* En exhibant deux matrices diagonalisables dont la somme ne l'est pas (la question 1 de la partie 2 donne un exemple), on montre que D_2 n'est pas stable par somme, donc
$\boxed{\mathrm{D}_2 \text{ n'est pas un sous-espace de } \mathcal{M}_2.}$

Méthode 2. Vu **1** et **2**, si D_2 était un sous-espace de $\mathcal{M}_2$, ce serait un sous-espace strict de $\mathcal{M}_2$ contenant $\mathcal{S}_2$, donc on aurait $\mathcal{S}_2 = \mathrm{D}_2$ au vu des dimensions. Or il existe des matrices diagonalisables non symétriques (par exemple celles données dans la question 1 de la partie 2), d'où une contradiction.

4. Un sous-espace de $\mathcal{M}_2$ contenant D_2 contient strictement $\mathcal{S}_2$ par **1** et **3**, donc est de dimension p telle que $3 < p \leqslant 4$, i.e. est de dimension 4.
$\boxed{\text{Ainsi le seul sous-espace de } \mathcal{M}_2 \text{ contenant } \mathrm{D}_2 \text{ est } \mathcal{M}_2.}$

5.1. L'application $\Delta : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (a-d)^2 + 4bc$ est polynomiale en les coefficients des matrices, donc est continue.
Ainsi $\Omega = \Delta^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$ est
$\boxed{\text{l'image réciproque d'un ouvert par une fonction continue donc } \Omega \text{ est un ouvert,}}$
et $F = \Delta^{-1}(\mathbb{R}_+)$ est
$\boxed{\text{l'image réciproque d'un fermé par une fonction continue donc } F \text{ est un fermé.}}$

5.2. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2$.

Le polynôme caractéristique $\chi_M = X^2 - (a+d)X + (ad-bc)$ de M a pour discriminant $(a+d)^2 - 4(ad-bc) = (a-d)^2 + 4bc = \Delta(M)$. D'où la discussion suivante :

- Si $\Delta(M) > 0$, alors χ_M admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$, donc M est diagonalisable (son polynôme caractéristique est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$). Donc $\boxed{\Omega \subset \mathrm{D}_2.}$
- Si M est diagonalisable, alors χ_M est scindé sur $\mathbb{R}$, donc admet deux racines réelles, ce qui implique $\Delta(M) \geqslant 0$ (sinon, χ_M aurait deux racines complexes conjuguées non réelles). Donc $\boxed{\mathrm{D}_2 \subset F.}$

5.3. *Méthode 1.* On utilise la caractérisation séquentielle des ouverts/fermés :

- Les matrices $\frac{1}{n}E_{1,2}$ ne sont pas diagonalisables (cf. **2**) et convergent, quand n tend vers $+\infty$, vers la matrice nulle, qui est diagonalisable. Cela montre que D_2 n'est pas ouvert (la matrice nulle appartient à D_2 mais pas à l'intérieur de D_2).
- Les matrices $\frac{1}{n}E_{1,1} + E_{1,2}$ sont diagonalisables (car elles ont deux valeurs propres distinctes $\frac{1}{n}$ et 0) et convergent, quand n tend vers $+\infty$, vers la matrice $E_{1,2}$, qui n'est pas diagonalisable

(cf. **2**). Cela montre que D_2 n'est pas fermé (la matrice $E_{1,2}$ est adhérente à D_2 sans appartenir à D_2).

Méthode 2. On utilise la question précédente :

- On montre que l'adhérence $\overline{\Omega}$ de Ω est F et que l'intérieur $\mathring{F}$ de F est Ω : les inclusions $\overline{\Omega} \subset F$ et $\Omega \subset \mathring{F}$ sont évidentes, et les deux autres résultent de la vérification de ce que toute matrice M telle que $\Delta(M) = 0$ appartient à la fois à l'adhérence de Ω et de $\mathcal{M}_2 \setminus F$ (...).
- Si D_2 est fermé, alors on déduit de **5.2** que $\overline{\Omega} \subset \mathrm{D}_2 \subset F$, donc que $\mathrm{D}_2 = F$ par le point précédent. C'est absurde puisque par exemple, $E_{1,2} \in F \setminus \mathrm{D}_2$.
- Si D_2 est ouvert, alors on déduit de **5.2** que $\Omega \subset \mathrm{D}_2 \subset \mathring{F}$, donc que $\mathrm{D}_2 = \Omega$ par le premier point. C'est absurde puisque par exemple, $I_2 \in \mathrm{D}_2 \setminus \Omega$.

Partie 2

1.1. Les matrices A et B sont triangulaires, donc leur polynôme caractéristique est scindé et a pour racines leurs coefficients diagonaux, à savoir -1 et 1 de multiplicité 1 et 0 de multiplicité $n-2$.

La dimension du sous-espace propre associé à une valeur propre de multiplicité 1 est nécessairement égale à cette multiplicité. De plus, les matrices A et B sont de rang 2, donc leur noyau est de dimension $n-2$ par théorème du rang, soit la multiplicité de la valeur propre 0.

Ainsi A et B ont un polynôme caractéristique scindé et tous leurs sous-espaces propres sont de dimension égale à la multiplicité de la valeur propre associée, donc $\boxed{A \text{ et } B \text{ sont diagonalisables.}}$

1.2. Las matrices A et B sont dans D_n mais leur somme $A + B = 2E_{1,2}$ n'y est pas (puisqu'elle a pour unique valeur propre 0 sans être la matrice nulle), donc D_n n'est pas stable par somme, donc $\boxed{\mathrm{D}_n \text{ n'est pas un sous-espace de } \mathcal{M}_n.}$

2. Soient $\mathcal{L}(E) \in \mathrm{Sp}(N)$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul tel $NX = \mathcal{L}(E)X$. On a alors ${}^tXNX = \mathcal{L}(E){}^tXX = \mathcal{L}(E)\|X\|^2$, et par ailleurs puisque ${}^tN = -N$, on a ${}^tXNX = -{}^tX{}^tNX = -{}^t(NX)X = -\mathcal{L}(E){}^tXX = -\mathcal{L}(E)\|X\|^2$. Donc $\mathcal{L}(E)\|X\|^2 = -\mathcal{L}(E)\|X\|^2$, et comme $\|X\|^2 \neq 0$, on a nécessairement $\mathcal{L}(E) = 0$. Cela montre que $\boxed{\mathrm{Sp}(N) \subset \{0\}.}$

3.
- Par **2**, une matrice à la fois antisymétrique et diagonalisable est nulle : en effet une telle matrice N est semblable à la matrice nulle (matrice diagonale de coefficients diagonaux la seule valeur propre possible de N), donc est égale à la matrice nulle. Ainsi $\mathrm{D}_n \cap \mathcal{A}_n = \{0\}$, et donc a fortiori $\boxed{S \cap \mathcal{A}_n = \{0\}.}$
- La formule de Grassmann donne alors $\dim(S) + \dim(\mathcal{A}_n) = \dim(S \oplus \mathcal{A}_n) \leqslant \dim(\mathcal{M}_n)$, donc nécessairement $\dim(S) \leqslant \dim(\mathcal{M}_n) - \dim(\mathcal{A}_n) = \frac{n(n+1)}{2}$.

  Ainsi, un sous-espace de $\mathcal{M}_n$ contenu dans D_n est nécessairement de dimension $d \leqslant \frac{n(n+1)}{2}$, et le sous-espace $\mathcal{S}_n$ est un exemple de tel sous-espace (par théorème spectral) réalisant le cas d'égalité.

4.1.
- L'application f_P est clairement linéaire (c'est d'ailleurs affirmé dans l'énoncé) de $\mathcal{M}_n$ dans $\mathcal{M}_n$, et telle que $f_P \circ f_{P^{-1}} = f_{P^{-1}} \circ f_P = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n}$. Donc f_P est un automorphisme de $\mathcal{M}_n$ de réciproque $\boxed{(f_P)^{-1} = f_{P^{-1}}.}$
- Ainsi f_P induit un isomorphisme de $\mathcal{S}_n$ sur $f_P(\mathcal{S}_n) = \mathcal{S}_P$, et donc par le théorème du rang appliqué à cet isomorphisme induit, $\boxed{\dim(\mathcal{S}_P) = \dim(\mathcal{S}_n).}$

4.2. Toute matrice semblable à une matrice diagonalisable est diagonalisable (par transitivité de la relation de similitude), et on a $\mathcal{S}_n \subset \mathrm{D}_n$ par théorème spectral, donc $\boxed{\mathcal{S}_P \subset \mathrm{D}_n.}$

4.3.
- Vu **4.2**, on a $\mathcal{S}_P \subset \mathrm{D}_n$ pour tout $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, autrement dit $\displaystyle\bigcup_{P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})} \mathcal{S}_P \subset \mathrm{D}_n$.

- Par définition, pour tout $M \in \mathrm{D}_n$, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n$ diagonale telle que $M = P^{-1}DP$, donc telle que $M \in \mathcal{S}_P$ (puisqu'une matrice diagonale est symétrique). Ainsi $\mathrm{D}_n \subset \bigcup\limits_{P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})} \mathcal{S}_P$.

Par double inclusion, on a donc bien l'égalité demandée.

5.1. La famille 1 constituée des matrices $E_{i,j} + E_{j,i}$ pour $(i,j) \in [1, n^2]$ tels que $i \leqslant j$, est une base de $\mathcal{S}_n$.

5.2.

- *Méthode 1.* L'interprétation matricielle des opérations élémentaires sur les lignes et colonnes des matrices montre que la matrice $P^{-1}T_{i,j}P$ se déduit de $T_{i,j}$ en multipliant sa j-ème colonne par 2 et sa j-ème ligne par $\frac{1}{2}$. Donc $P^{-1}T_{i,j}P = 2(E_{i,j} + E_{j,i})$.

  Méthode 2 (en suivant l'indication). Si p est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice $T_{i,j}$ dans la base canonique $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$, alors $P^{-1}T_{i,j}P$ est la matrice de p dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_{j-1}, 2e_j, e_{j+1}, \dots, e_n)$.

  Or vu $T_{i,j}$, on a $p(e_k) = 0_{\mathbb{R}^n}$ si $k \notin \{i,j\}$, $p(e_i) = 4e_j = 2(2e_j)$, et $p(e_j) = e_i$, donc $p(2e_j) = 2e_i$, d'où $P^{-1}T_{i,j}P = M_\beta(p) = 2(E_{i,j} + E_{j,i})$.
- Comme $T_{i,j}$ est semblable à une matrice symétrique (réelle), $\boxed{T_{i,j} \text{ est diagonalisable (cf. } \mathbf{4.2}\text{).}}$

5.3.

- Soit $M = \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathcal{L}(E)_{i,j} T_{i,j} \in$.

  Le coefficient d'indices $(i_0, j_0) \in [1, n^2]$ dans M est $\mathcal{L}(E)_{i_0,j_0}$ si $i_0 < j_0$, ou $4\mathcal{L}(E)_{j_0,i_0}$ si $i_0 > j_0$. Ainsi si $M = (0)$, ou plus généralement si $M \in \mathcal{S}_n$, on a nécessairement $\mathcal{L}(E)_{i,j} = 4\mathcal{L}(E)_{i,j}$, i.e. $\mathcal{L}(E)_{i,j} = 0$, pour tous $1 \leqslant i < j \leqslant n$.

  On en déduit à la fois que $\cap \mathcal{S}_n = \{(0)\}$, et que la famille $(T_{i,j})_{1 \leqslant i < j \leqslant n}$ est libre, donc est une base de, de sorte que $\boxed{\dim(\mathcal{T}) = \frac{n(n-1)}{2}}$ (cardinal de cette famille).
- Ainsi les sous-espaces et $\mathcal{S}_n$ sont en comme directe, et par la formule de Grassmann, $\dim(\mathcal{T} \oplus \mathcal{S}_n) = \dim(\mathcal{T}) + \dim(\mathcal{S}_n) = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = n^2 = \dim(\mathcal{M}_n)$, donc $\mathcal{T} \oplus \mathcal{S}_n = \mathcal{M}_n$.
- Vu **5.1** et les deux points précédents, la famille constituée des matrices $T_{i,j}$, pour $1 \leqslant i < j \leqslant n$, et des matrices $E_{i,j} + E_{j,i}$, pour $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$, est une base de $\mathcal{M}_n$. Et vu **5.2** et le théorème spectral, toutes ces matrices sont diagonalisables.

5.4. Si un sous-espace de $\mathcal{M}_n$ contient D_n, alors il contient une base de $\mathcal{M}_n$ par **5.3**, donc il est égal à $\mathcal{M}_n$. Ainsi le seul sous-espace de $\mathcal{M}_n$ contenant D_n est $\mathcal{M}_n$.

Convergence dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

4. Soit $x \in \text{Ker}\,(u - I_E)$. On a $u(x) = x$ et par récurrence immédiate, $u^k(x) = x$ pour tout k. Ainsi, $r_k(x) = x$ et

$$\boxed{\forall x \in \text{Ker}\,(u - I_E),\, r_k(x) \to x}$$

5. Soit $x \in \text{Im}(u - I_E)$. Il existe y tel que $x = (u - I_E)(y)$ et donc $x = u(y) - y$. Ainsi $u^l(x) = u^{l+1}(x) - u^l(x)$ et (télescopage)

$$r_k(x) = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1}(u^{l+1}(x) - u^l(x)) = \frac{1}{k}(u^k(x) - x)$$

On en déduit que $\|r_k(x)\| \leqslant \frac{1}{k}(\|u^k(x)\| + \|x\|)$. Or, u contractant les normes, $\|u^k(x)\| \leqslant \|x\|$ et donc notre majorant est de limite nulle. Ceci montre que

$$\boxed{\forall x \in \text{Im}(u - I_E),\, r_k(x) \to 0_E}$$

6. Par théorème du rang, on a les bonnes dimensions. De plus, si $x \in \text{Im}(u - I_E) \cap \text{Ker}\,(u - I_E)$, $(r_k(x))$ est simultanément de limite x et 0_E et donc $x = 0_E$ par unicité de la limite. L'intersection est donc réduite à 0_E et la somme est directe. Finalement

$$\boxed{E = \text{Ker}\,(u - I_E) \oplus \text{Im}(u - I_E)}$$

7. Soit $x \in E$. Il existe $y \in \text{Ker}\,(u - I_E)$ et $z \in \text{Im}(u - I_E)$ tels que $x = y + z$. On a alors $r^k(x) = r^k(y) + r^k(z) \to y$. $x \mapsto y$ est la projection sur $\text{Ker}\,(u - I_E)$ de direction $\text{Im}(u - I_E)$.

$$\boxed{\forall x \in E,\, r_k(x) \to p(x) \text{ avec } p \text{ projection sur Ker}\,(u - I_E) \text{ de direction Im}(u - I_E)}$$

8. Pour parler de convergence dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on doit munir cet espace d'une norme. Et comme l'espace est de dimension finie, le choix de la norme est indifférent (les normes sont équivalentes en dimension finie). Les mêmes calculs que ceux menés ci-dessus montrent que

$$\forall X \in \mathbb{R}^n,\ R_kX \to PX$$

où P est la matrice (dans la base canonique) de la projection sur $\text{Ker}\,(A - I_n)$ de direction $\text{Im}(A - I_n)$ (espaces supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$). Appliquons ceci aux éléments E_i de la base canonique de $\mathbb{R}^n$: $\forall i,\ \|R_kE_i - PE_i\| \to 0$. Comme tous les normes sont équivalentes sur $\mathbb{R}^n$, on peut choisir de travailler avec la norme infinie associée à la base canonique. $\|R_kE_i - PE_i\| \to 0$ signifie alors que chaque suite des coefficients de R_kEi converge vers le coefficient associé de PE_i. Ceci signifie donc que chaque suite coefficient de R_k converge vers le coefficient de P associé. Ou encore que $R_k \to P$ au sens de la norme "maximum du module des coefficients". On a donc convergence de (R_k) vers P. Enfin, P est la matrice d'une projection et $P^2 = P$.

$$\boxed{\exists\, P/\ R_k \to P \text{ et } P^2 = P}$$

Matrices stochastiques

9. Posons $V = AU$. On a

$$\forall i,\ V_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}U_j = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}$$

On en déduit que

$$\boxed{(4) \text{ équivaut à } AU = U}$$

10. Soient A, B stochastiques. Par les formules de produit, $C = AB$ est à coefficients positifs (chaque $c_{i,j}$ est somme et produit de termes $\geqslant 0$). En outre $CU = ABU = AU = U$ avec la question précédente. Cette même question indique que C vérifie (4) et est donc stochastique.

$$\boxed{\mathcal{E} \text{ est stable par multiplication}}$$

11. Soit (A_k) une suite convergente de matrices stochastiques et A sa limite. Chaque coefficient de A est limite de la suite correspondante des coefficients de A_k et est positif comme limite de tels termes. De plus, $\forall k,\ A_k U = U$ donne $AU = U$. Ainsi A est stochastique.

$$\boxed{\mathcal{E} \text{ est fermé}}$$

Soient A, B stochastiques et $\lambda \in [0,1]$. Posons $M = \lambda A + (1-\lambda)B$. La positivité des coefficients de A et B entraîne celle des coefficients de M. De plus $MU = \lambda AU + (1-\lambda)BU = \lambda U + (1-\lambda)U = U$ ce qui donne (4) pour M qui est donc stochastique.

$$\boxed{\mathcal{E} \text{ est convexe}}$$

12. Posons $Y = AX = (y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. On a

$$\forall i,\ |y_i| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \cdot |x_j| \leqslant \|x\|_\infty \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \|x\|_\infty$$

Ceci étant vrai pour tout i, on a

$$\boxed{\|AX\|_\infty \leqslant \|X\|_\infty \text{ pour tout } X \in \mathbb{R}^n}$$

13. Notons $B = A^p = (b_{i,j})$. B est une matrice stochastique (question 12) à coefficients > 0. Soit $X \in \text{Ker}\,(B - I_n)$ et s un indice tel que x_s est le maximum des x_i. On a $BX = X$ et, en regardant le coefficient d'indice s de cet élément de $\mathbb{R}^n$,

$$x_s = \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} x_j \leqslant x_s \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} = x_s$$

(on a utilisé la positivité des $b_{i,j}$ pour dire que $b_{i,j} x_j \leqslant b_{i,j} x_s$). Si, par l'absurde, il existait un j tel que $x_j < x_s$ alors, comme $b_{i,j} > 0$, on aurait $b_{i,j} x_j < b_{i,j} x_s$ et on obtiendrait ci-dessus $x_s < x_s$ et donc une contradiction. Ceci montre que les x_j sont tous égaus et donc que $X \in \text{Vect}(U)$. Ainsi $\text{Ker}\,(A^p - I_n) \subset \text{Vect}(U)$. Mais A^p est une matrice stochastique (question 12) et on a donc $U \in \text{Ker}\,(A - I_p)$. Ainsi

$$\boxed{\text{Ker}\,(A^p - I_n) = \text{Vect}(U) \text{ et donc } \dim(\text{Ker}\,(A^p - I_n)) = 1}$$

14. On sait déjà que $\text{Vect}(U) \subset \text{Ker}\,(A - I_n)$ car A est stochastique. Si $AX = X$ alors par récurrence $A^k X = X$ pour tout k et en particulier $A^p X = X$. la question précédente montre que $X \in \text{Vect}(U)$ et ainsi

$$\boxed{\text{Ker}\,(A - I_n) = \text{Vect}(U)}$$

15. Les A^l sont toutes stochastiques (question 12). R_k est donc à coefficients positifs comme somme de telles matrices. De plus

$$R_k U = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} A^l U = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} U = U$$

et on a aussi (4). Finalement

$$\boxed{R_k \text{ est stochastique pour tout } k}$$

On aurait aussi pu utiliser la convexité de $\mathcal{E}$ puisque $\mathcal{E}$ est isobarycentre de matrices stochastiques.

16. Les questions 10 et 14 montrent que (R_k) est convergente de limite P telle que $P^2 = P$. De plus, les questions 17 et 13 (caractère fermé) montrent que P est stochastique. La partie **2** a montré que P est la matrice de la projection sur Ker $(A - I_n)$ de direction $\text{Im}(A - I_n)$. On a donc $\text{Im}(P) = \text{Vect}(U)$ et P est de rang 1.

$$\boxed{R_k \to P,\ P \in \mathcal{E},\ \text{Im}(P) = \text{Vect}(U)}$$

17. Toutes les colonnes de P sont ainsi multiples de P et il existe λ_i telle que la colonne i s'écrive $\lambda_i U$. En posant $L = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ (matrice ligne) on a alors $P = UL$. Comme toutes les coordonnées de U valent 1, toutes les lignes de P valent L. Comme P est stochastique, L l'est aussi.

$$\boxed{P = UL \text{ avec } L \text{ matrice ligne stochastique}}$$

18. Remarquons que

$$R_k A = \frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k} A^l = \frac{1}{k}((k+1)R_{k+1} - I_n) = \frac{k+1}{k}R_{k+1} - \frac{1}{k}I_n$$

En faisant tendre k vers $+\infty$, on obtient

$$\boxed{PA = P}$$

On aurait aussi pu dire que $\text{Im}(A - I_n) = \text{Ker}\,(P)$ *et que donc* $P(A - I_n) = 0$.
P est une matrice dont toutes les lignes sont égale à L. PA est ainsi une matrice dont toutes les lignes sont LA. L'égalité $PA = P$ donne ainsi $LA = L$.
Si Y est une matrice ligne, $YA = A$ s'écrit aussi $A^T Y^T = Y^T$ ou encore $(A^T - I_n)Y^T = 0$. Or, avec la question 16, $A - I_n$ est de rang $n-1$ (par théorème du rang) et il en est de même de $A^T - I_n$. Le noyau de $A^T - I_n$ est ainsi de dimension 1. Il contient la matrice L^T qui est non nulle (car sinon $P = 0$). Ainsi, les matrices ligne Y vérifiant $YA = A$ sont les multiples de L. La somme des coefficients de λL ne valant 1 que si $\lambda = 1$, on a finalement

$$\boxed{L \text{ est la seule ligne stochastique telle que } LA = L}$$

19. On montre par récurrence simple que $LA^k = L$ pour tout k. En particulier, $LA^p = L$. Si, par l'absurde, on avait $\lambda_i = 0$ alors en regardant le i-ème coefficient de $LA^p = L$, on aurait

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (A^p)_{j,i}$$

Les $(A^p)_{j,i}$ étant > 0 et les λ_j positifs non tous nuls, ceci est impossible. On a montré que

$$\boxed{L \text{ est à coefficients strictement positifs}}$$

20. On sait que $\text{Ker}\,(A - I_n) \oplus \text{Im}(A - I_n) = \mathbb{R}^n$. Les espaces $F = \text{Ker}\,(A - I_n)$ et $G = \text{Im}(A - I_n)$ sont stables par l'endomorphisme canoniquement associé à A. En notant $u_F \in \mathcal{L}(F)$ et $u_G \in \mathcal{L}(G)$ les endomorphismes induits, comme $F \oplus G = \mathbb{R}^n$,

$$\chi_u = \chi_{u_F}\chi_{u_G}$$

F est de dimension 1 et $u_F = \text{Id}_F$ donc $\chi_{u_F} = (X-1)$. Comme $F \cap G = \{0\}$, $u_G - \text{Id}_G$ est inversible et 1 n'est pas racine de χ_{u_G}. De tout cela, on déduit que 1 est racine simple de χ_u, c'est à dire

$$\boxed{1 \text{ est valeur propre simple de } A}$$