

DEVOIR SURVEILLÉ 9

Vendredi 21 mars 2019

L'usage des calculatrices est interdit

Ce sujet comporte 2 problèmes indépendants.

Le sujet est LONG, mais découpé en plusieurs morceaux ou parties. Soignez votre rédaction dans les questions que vous aborderez.

Un barème indicatif est proposé pour chaque partie. Il pourra être modifié lors de la correction, mais devrait vous permettre de répartir intelligemment vos efforts dans le temps imparti.

PROBLÈME 1 (17 points sur 20)

Notations et définitions

- \mathbb{N} désigne l'ensemble des entiers naturels, \mathbb{N}^* désigne l'ensemble des entiers naturels non nuls.
- \mathbb{R} désigne l'ensemble des nombres réels.
- $\mathbb{R}[X]$ désigne le \mathbb{R} -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ le \mathbb{R} -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n .
- Si n_1 et n_2 sont deux entiers naturels, on note $[[n_1, n_2]]$ l'ensemble des entiers naturels compris (au sens large) entre n_1 et n_2 .

Objectifs

On s'intéresse dans ce problème à l'équation différentielle $x^2y'' + axy' + by = 0$. La **partie I** est une partie d'algèbre qui traite des solutions polynomiales de cette équation lorsque a et b sont des constantes réelles. Dans la **partie II**, on détermine l'ensemble des solutions de l'équation lorsque a et b sont des constantes réelles. La **partie III** traite des solutions de cette équation lorsque $a = 1$ et b est la fonction carré.

Partie I - Endomorphismes : barème : 5 points

Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel non nul et a et b des constantes réelles.

Q1. On note Δ l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \Delta(P) = XP'.$$

Calculer $\Delta(X^k)$ pour tout $k \in [[0; n]]$.

- Q2.** Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $X^2P'' = \Delta \circ (\Delta - \text{Id})(P)$, où Id désigne l'endomorphisme identité sur $\mathbb{R}[X]$.
- Q3.** Montrer que si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $\Delta(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.
On notera Δ_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par Δ .
- Q4.** Déterminer la matrice de Δ_n dans la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
- Q5.** On définit l'application Φ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \Phi(P) = X^2P'' + aXP'.$$

Montrer que $\Phi = \Delta^2 + (a-1)\Delta$ et en déduire que Φ définit un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

- Q6.** Montrer que Φ induit un endomorphisme Φ_n de $\mathbb{R}_n[X]$.
- Q7.** Montrer que Φ_n est diagonalisable.

On considère l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \varphi(P) = X^2P'' + aXP' + bP.$$

- Q8.** Montrer que φ induit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, endomorphisme que l'on notera φ_n .
Exprimer φ_n en fonction de Δ_n .
- Q9.** Exprimer la matrice de φ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
On considère l'équation :

$$s^2 + (a-1)s + b = 0. \tag{1}$$

- Q10.** Expliciter le noyau de φ_n lorsque l'équation (1) admet deux racines entières distinctes m_1, m_2 dans $\llbracket 0; n \rrbracket$.
- Q11.** Expliciter le noyau de φ_n lorsque l'équation (1) admet une unique racine entière $m \in \llbracket 0; n \rrbracket$.
- Q12.** Déterminer le noyau de φ . En déduire qu'il est de dimension finie et déterminer sa dimension.

Partie II - Une équation différentielle : 3,5 points

On considère dans cette partie l'équation différentielle

$$x^2y'' + axy' + by = 0, \tag{2}$$

où a et b sont des constantes réelles.

- Q13.** Que déduit-on du théorème de Cauchy quant à la structure de l'ensemble des solutions de l'équation (2) sur $I =]0, +\infty[$? Et sur $J =]-\infty, 0[$?
- Q14.** Montrer que si y est une solution de (2) sur I , alors $g = y \circ \exp$ est une solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$u'' + (a-1)u' + bu = 0. \tag{3}$$

- Q15.** Réciproquement, soit $t \mapsto g(t)$ une solution de (3) sur \mathbb{R} . Montrer que la fonction $g \circ \ln$ est solution de (2) sur I .
- Q16.** Donner les solutions à valeurs réelles de l'équation (3) dans le cas où $a = 3$ et $b = 1$ et dans le cas où $a = 1$ et $b = 4$. En déduire, dans chacun des cas, les solutions à valeurs réelles de l'équation (2) sur l'intervalle I .

On suppose dans les deux questions suivantes uniquement que $a = 1$ et $b = -4$.

- Q17.** Montrer que si y est solution de (2) sur J , alors $h = y \circ (-\exp)$ est solution de (3) sur \mathbb{R} .
- Q18.** En étudiant proprement le recollement des solutions obtenues, déduire de ce qui précède l'ensemble des solutions de (2) de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} .

Partie III - Une équation de Bessel : 8,5 points

On se propose dans cette partie d'étudier l'équation différentielle :

$$x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0. \quad (4)$$

- Q19.** Rappeler la définition du rayon de convergence d'une série entière.

Série entière dont la somme est solution de (4).

On suppose qu'il existe une série entière $\sum_{k \geq 0} c_k x^k$, avec $c_0 = 1$, de rayon de convergence R non nul et dont la fonction somme J_0 est solution de (4) sur $] -R, R[$.

- Q20.** Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{cases} c_{2k+1} &= 0 \\ c_{2k} &= \frac{(-1)^k}{4^k (k!)^2}. \end{cases}$$

- Q21.** Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k \geq 0} c_k x^k$.
- Q22.** Soient $r > 0$ et f une autre solution de (4) sur $]0, r[$. Montrer que si (J_0, f) est liée dans l'espace vectoriel des fonctions de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, r[$, alors f est bornée au voisinage de 0.

Inverse d'une série entière non nulle en 0

Soit $\sum_{k \geq 0} \alpha_k x^k$ une série entière de rayon de convergence $R_\alpha > 0$ telle que $\alpha_0 = 1$. L'objectif de ce paragraphe est de montrer l'existence et l'unicité d'une série entière $\sum_{k \geq 0} \beta_k x^k$ de rayon de convergence $R_\beta > 0$ telle que pour tout x appartenant aux domaines de convergence des deux séries :

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k x^k \right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k x^k \right) = 1.$$

- Q23.** Montrer que si $\sum_{k \geq 0} \beta_k x^k$ est solution, alors la suite $(\beta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ satisfait aux relations suivantes :

$$\begin{cases} \beta_0 &= 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^n \alpha_k \beta_{n-k} &= 0. \end{cases} \quad (5)$$

Soit r un réel tel que $0 < r < R_\alpha$.

- Q24.** Montrer qu'il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $|\alpha_k| \leq \frac{M}{r^k}$.

Q25. Montrer que (5) admet une unique solution $(\beta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$|\beta_k| \leq \frac{M(M+1)^{k-1}}{r^k}.$$

On pourra raisonner par récurrence.

Q26. Que peut-on dire du rayon de convergence $R_\beta > 0$ de la série entière $\sum_{k \geq 0} \beta_k x^k$?

Ensemble des solutions de (4)

Q27. Soient $r > 0$ et λ une fonction de classe C^2 sur $]0, r[$.

Montrer que la fonction $y: x \mapsto \lambda(x)J_0(x)$ est solution de (4) sur $]0, r[$ si et seulement si la fonction $x: \mapsto xJ_0^2(x)\lambda'(x)$ est de dérivée nulle sur $]0, r[$.

Q28. Montrer que J_0^2 est somme d'une série entière dont on donnera le rayon de convergence. Que vaut $J_0^2(0)$?

Q29. En déduire l'existence d'une fonction η somme d'une série entière de rayon de convergence $R_\eta > 0$ telle que :

$$x \mapsto \eta(x) + J_0(x) \ln(x)$$

soit solution de (4) sur un intervalle $]0, R_\eta[$.

Q30. En déduire l'ensemble des solutions de (4) sur $]0, R_\eta[$.

PROBLÈME 2 : (8 points sur 20)

Notations et définitions

- \mathbb{N} désigne l'ensemble des entiers naturels et \mathbb{R} celui des nombres réels.
- Si X est une variable aléatoire admettant une espérance, on note $\mathbb{E}(X)$ cette espérance.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $[-1, 1]$. On considère dans ce problème une suite $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires *discrètes* sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, *mutuellement indépendantes et de même loi que X*. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$S_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}.$$

L'objectif de ce problème est de montrer que si la variable aléatoire X est centrée, ($\mathbb{E}(X) = 0$), alors la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ converge presque sûrement vers la constante 0. Il s'agit d'un cas particulier de la loi forte des grands nombres.

On suppose pour l'instant que X est *centrée*.

Q31. Montrer que toute variable aléatoire bornée Z admet une espérance.

Q32. Énoncer et démontrer l'inégalité de Markov pour une variable aléatoire positive Y sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Q33. En déduire que, pour tout $\alpha > 0$:

$$\mathbb{P}(|X| \geq \alpha) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|)}{\alpha}.$$

Q34. Montrer que, pour tout $t > 0$, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\mathbb{P}(S_n \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(e^{tnS_n} \geq e^{tn\varepsilon}) \leq \frac{(\mathbb{E}(e^{tX}))^n}{e^{tn\varepsilon}}.$$

Majoration de $\mathbb{E}(e^{tX})$.

Q35. Soit $a > 1$. On considère la fonction g_a définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, g_a(x) = \frac{1-x}{2}a^{-1} + \frac{1+x}{2}a - a^x.$$

Montrer que la fonction g_a est dérivable sur \mathbb{R} et que la fonction g'_a est décroissante sur \mathbb{R} . En déduire, en remarquant que $g_a(-1) = g_a(1) = 0$, que, pour tout $x \in [-1, 1]$, $g_a(x) \geq 0$.

Q36. En déduire que

$$\forall t > 0, \forall x \in [-1, 1], e^{tx} \leq \frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^t.$$

Q37. En déduire que

$$\forall t > 0, \mathbb{E}(e^{tX}) \leq \text{ch } t.$$

Q38. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, \frac{t^{2k}}{(2k)!} \leq \frac{1}{k!} \left(\frac{t^2}{2}\right)^k.$$

En déduire que

$$\forall t > 0, \mathbb{E}(e^{tX}) \leq e^{t^2/2}.$$

Majoration de $\mathbb{P}(|S_n| \geq \varepsilon)$

Dans ce paragraphe, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un réel $\varepsilon > 0$.

Q39. Montrer que la fonction $\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{-nt\varepsilon + nt^2/2}$ atteint un minimum en un point que l'on précisera.

Q40. En déduire que $\mathbb{P}(S_n \geq \varepsilon) \leq e^{-n\varepsilon^2/2}$, puis que

$$\mathbb{P}(|S_n| \geq \varepsilon) \leq 2e^{-n\varepsilon^2/2}.$$

Conclusion

Q41. Montrer que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, la série de terme général $\mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon)$ converge.

Q42. On fixe un réel $\varepsilon > 0$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$B_n(\varepsilon) = \bigcup_{m \geq n} \{\omega \in \Omega ; |S_m(\omega)| > \varepsilon\}.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $\varepsilon > 0$, $B_n(\varepsilon)$ est un événement est que $\mathbb{P}(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n(\varepsilon)) = 0$.

Q43. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, posons

$$\Omega_k = \left\{ \omega \in \Omega ; \exists n \in \mathbb{N}^*, \forall m \geq n, |S_m(\omega)| \leq \frac{1}{k} \right\}.$$

Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, Ω_k est un événement.

Écrire l'ensemble $A = \{\omega \in \Omega ; \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(\omega) = 0\}$ à l'aide des événements Ω_k , $k \in \mathbb{N}^*$. En déduire que A est un événement.

Q44. Déduire des questions précédentes que $\mathbb{P}(A) = 1$.

CCP – PSI – 2018

PROBLÈME 1

Partie I - Endomorphismes

- Q1.** Pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\Delta(X^k) = XkX^{k-1} = kX^k$. Et pour $k = 0$, $\Delta(X^0) = X \times 0 = 0 = 0X^0$.
Donc pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$:

$$\Delta(X^k) = kX^k.$$

- Q2.** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. En dérivant XP' comme un produit, on obtient :

$$\Delta \circ (\Delta - \text{Id})(P) = \Delta(XP' - P) = X(P' + XP'' - P') = X^2P''.$$

- Q3.** Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Alors $P' \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $XP' \in \mathbb{R}_n[X]$. Donc :

$$\Delta(P) \in \mathbb{R}_n[X].$$

- Q4.** D'après Q1., on complète les colonnes de la matrice avec les coordonnées, pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, de $\Delta(X^k)$ sur la base canonique. On obtient la matrice diagonale de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & n \end{pmatrix}.$$

- Q5.** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. D'après Q2., $(\Delta^2 - \Delta)(P) = X^2P''$.

Donc $(\Delta^2 + (a-1)\Delta)(P) = (\Delta^2 - \Delta)(P) + a\Delta(P) = X^2P'' + aXP' = \Phi(P)$. D'où :

$$\Phi = \Delta^2 + (a-1)\Delta.$$

Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ donc Δ^2 également. Par combinaison linéaire :

Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

- Q6.** Avec le même raisonnement, en remplaçant $\mathbb{R}[X]$ par $\mathbb{R}_n[X]$:

Φ induit un endomorphisme Φ_n de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\Phi_n = \Delta_n^2 + (a-1)\Delta_n$.

- Q7.** Dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, la matrice de Δ_n est diagonale. Ce qui est donc le cas de la matrice de Δ_n^2 . D'après l'égalité $\Phi_n = \Delta_n^2 + (a-1)\Delta_n$, la matrice de Φ_n dans la base canonique est diagonale par combinaison linéaire et :

Φ_n est diagonalisable.

- Q8.** On remarque que $\varphi = \Phi + b\text{Id}$. Φ et Id induisent des endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$. Par combinaison linéaire :

φ induit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

D'après les égalités précédentes (Q5.), on obtient :

$$\varphi_n = \Delta_n^2 + (a-1)\Delta_n + b\text{Id},$$

où Id désigne ici l'endomorphisme identité sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Q9. D'après Q4., la matrice de Δ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est la matrice diagonale de coefficient diagonal $\delta_k = k$ pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, souvent notée $\text{diag}(0, 1, 2, \dots, n)$.

D'après Q9., $\varphi_n = \Delta_n^2 + (a-1)\Delta_n + b\text{Id}$, donc la matrice de φ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est la matrice diagonale de coefficients diagonaux $\delta_k^2 + (a-1)\delta_k + b = k^2 + (a-1)k + b$ pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, soit $\text{diag}(b, 1^2 + (a-1) \times 1 + b, 2^2 + (a-1)2 + b, \dots, n^2 + (a-1)n + b)$.

Q10. Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$.

$$P \in \ker(\varphi_n) \Leftrightarrow \varphi_n(P) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^n a_k \varphi_n(X^k) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^n a_k (k^2 + (a-1)k + b) X^k = 0 \text{ d'après Q9.}$$

$$\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, a_k (k^2 + (a-1)k + b) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket \setminus \{m_1, m_2\}, a_k = 0$$

$$\text{si et seulement si } P = a_{m_1} X^{m_1} + a_{m_2} X^{m_2}$$

$$\text{D'où } \ker(\varphi_n) = \text{Vect}(X^{m_1}, X^{m_2}).$$

Remarque : on pouvait également déterminer le noyau de la matrice de φ_n et revenir aux polynômes à partir des coordonnées trouvées.

Q11. De même, on obtient :

$$\ker(\varphi_n) = \text{Vect}(X^m)$$

Q12. De même, si l'équation (1) n'admet pas de racine entière, $\ker(\varphi_n) = \{0\}$.

Si $P \in \ker(\varphi) \setminus \{0\}$, notons $n = \deg(P)$. Ainsi $\varphi(P) = \varphi_n(P) = 0$ et $P \in \ker(\varphi_n)$.

Ainsi $\ker(\varphi) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \ker(\varphi_n)$. D'où :

$\dim \ker(\varphi) \in \llbracket 0; 2 \rrbracket$ et est égale au nombre de racines entières de l'équation (1).

Partie II - Une équation différentielle

Q13. (2) est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients continus. Comme la fonction $x \mapsto x^2$ ne s'annule pas sur I :

l'ensemble des solutions de (2) sur I est un espace vectoriel de dimension 2.

De même sur J .

Q14. Soit y une solution de (2) sur I . Posons $g = y \circ \exp$. g est définie et deux fois dérivable sur \mathbb{R} par composition de \exp , définie et deux fois dérivable sur \mathbb{R} et à valeurs dans I , et de y , définie et deux fois dérivable sur I . On a alors :

$$g' = y' \circ \exp \times \exp \text{ et } g'' = y'' \circ \exp \times \exp^2 + y' \circ \exp \times \exp. \text{ Pour tout } x \in \mathbb{R} :$$

$$g''(x) + (a-1)g'(x) + bg(x) = y''(\exp(x)) \times \exp^2(x) + a y'(\exp(x)) \times \exp(x) + b y(\exp(x))$$

$$= y''(t)t^2 + ay'(t)t + by(t) \text{ en posant } \exp(x) = t \in I$$

$$= 0 \text{ car } y \text{ est solution de (2).}$$

Ainsi $g = y \circ \exp$ est solution sur \mathbb{R} de l'équation (3).

Q15. Posons $h = g \circ \ln$. h est définie et deux fois dérivable sur I par composition de \ln , définie et deux fois dérivable sur I et à valeurs dans \mathbb{R} , et de g , définie et deux fois dérivable sur \mathbb{R} .

Pour tout $x \in I$:

$$h'(x) = g'(\ln(x)) \frac{1}{x} \text{ et } h''(x) = g''(\ln(x)) \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} g'(\ln(x)).$$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } x^2 h''(x) + axh'(x) + bh(x) &= g''(t) + (a-1)g'(t) + bg(t) \text{ en posant } \ln(x) = t \\ &= 0 \text{ car } g \text{ est solution de (3).} \end{aligned}$$

Ainsi $g \circ \ln$ est solution sur I de l'équation (2).

Q16. ► On commence par résoudre (3), équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants. On associe l'équation caractéristique $r^2 + 2r + 1 = 0$ de racine double -1 .

Ainsi les solutions de (3) sur \mathbb{R} sont $u : t \mapsto (\lambda t + \mu)e^{-t}$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

D'après Q15. et Q16., les solutions de (2) sur I sont

$$y : x \mapsto u(\ln(x)) = (\lambda \ln(x) + \mu) \frac{1}{x}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

► De même, avec $2i$ et $-2i$ comme racines de l'équation caractéristique, les solutions de (3) sont $u : t \mapsto \lambda \cos(2t) + \mu \sin(2t)$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Les solutions de (2) sur I sont

$$y : x \mapsto u(\ln(x)) = \lambda \cos(2 \ln(x)) + \mu \sin(2 \ln(x)), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Q17. On procède de même qu'en Q14. avec :

$$h' = -y' \circ (-\exp) \times \exp \quad \text{et} \quad h'' = y'' \circ (-\exp) \times \exp^2 - \exp \times y' \circ (-\exp).$$

On obtient alors $h'' - 4h = 0$ car y est solution de (2).

Donc si y est solution de (2) sur J , alors $h = y \circ (-\exp)$ est solution de (3) sur \mathbb{R} .

Q18. L'équation caractéristique associée à (3) est $r^2 - 4 = 0$, de racines 2 et -2 .

Les solutions de (3) sont donc $u : t \mapsto \lambda e^{2t} + \mu e^{-2t}$.

D'après Q14. et Q15., les solutions de (2) sur I sont donc $y_I : x \mapsto \lambda x^2 + \frac{\mu}{x^2}$.

De même que Q15., on prouve que si g est solution de (3) sur \mathbb{R} , alors $x \mapsto g(\ln(-x))$ est solution de (2) sur I . Ainsi, les solutions de (2) sur J sont $y_J : x \mapsto \alpha x^2 + \frac{\beta}{x^2}$.

On procède alors à un recollement des solutions : on cherche les conditions sur $\lambda, \mu, \alpha, \beta$ pour avoir

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} y_J(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} y_I(x) \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} y_J'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} y_I'(x) \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} y_J''(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} y_I''(x) \end{cases} \text{ avec des limites finies.}$$

Pour des limites finies pour y_I et y_J , on obtient $\beta = 0$ et $\mu = 0$. Dans ce cas, ces limites sont alors égales à 0.

Ainsi $y_I : x \mapsto \lambda x^2$ et $y_J : x \mapsto \alpha x^2$.

D'où $y_I'(x) = 2\lambda x$ et $y_J'(x) = 2\alpha x$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} y_J'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} y_I'(x) = 0$.

Enfin, $y_I''(x) = 2\lambda$ et $y_J''(x) = 2\alpha$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} y_J''(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} y_I''(x)$ si et seulement si $\lambda = \alpha$.

Les fonctions y définies sur $I \cup J$ par $x \mapsto \lambda x^2$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $y(0) = 0, y'(0) = 0$ et $y''(0) = 2\lambda$, qui consiste à prendre

$y : x \mapsto \lambda x^2$ définie sur \mathbb{R} ,

est alors de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} et on vérifie qu'elle est bien solution de (2) sur \mathbb{R} .

Partie III - Une équation de Bessel

Q19. Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est

$$R = \sup \{ r \geq 0 / (a_n r^n)_n \text{ est bornée} \} \quad \text{et} \quad R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

Q20. J_0 est de classe C^∞ sur $] -R, R[$ et se dérive terme à terme.

$\forall x \in] -R, R[$,

$$\begin{aligned} J_0(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k \\ J_0'(x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k c_k x^{k-1} \\ J_0''(x) &= \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) c_k x^{k-2} \\ x^2 J_0''(x) + x J_0'(x) + x^2 J_0(x) &= \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) c_k x^k + \sum_{k=1}^{+\infty} k c_k x^k + \sum_{k=2}^{+\infty} c_{k-2} x^k \\ x^2 J_0''(x) + x J_0'(x) + x^2 J_0(x) &= c_1 x + \sum_{k=2}^{+\infty} (k^2 c_k + c_{k-2}) x^k. \end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière (sous réserve que $R > 0$), comme J_0 est solution de (4), on en déduit :

$$c_1 = 0 \quad \text{et} \quad \forall k \geq 2, \quad c_k = -\frac{c_{k-2}}{k^2}.$$

Comme, de plus, $c_0 = 1$ par hypothèse, on montre facilement par récurrence que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad c_{2k+1} = 0 \quad \text{et} \quad c_{2k} = \frac{(-1)^k}{4^k (k!)^2}.$$

Q21. On s'intéresse à la série entière $\sum c_{2k} x^{2k}$. Une série entière converge toujours pour $x = 0$.

Prenons x dans \mathbb{R}^* et notons, pour $k \in \mathbb{N}$, $u_k(x) = c_{2k} x^{2k}$. Ainsi, $u_k(x) \neq 0$ et

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{k+1}(x)}{u_k(x)} \right| = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{x^2}{4(k+1)^2} \right| = 0 < 1.$$

Donc le critère de d'Alembert permet de conclure que cette série entière converge pour tout réel x et que son rayon de convergence est donc $R = +\infty$.

On a donc prouvé que la somme de cette série entière, appelée J_0 dans l'énoncé, est une solution de (4) sur \mathbb{R} .

Q22. J_0 est continue sur \mathbb{R} , donc continue sur le segment $[0, r]$ et donc bornée sur ce segment.

J_0 n'est pas la fonction nulle (par unicité du développement en série entière), donc si (J_0, f) est une famille liée de l'espace vectoriel des fonctions de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, r[$, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f = a J_0$ et f est ainsi bornée sur $]0, r[$ et donc au voisinage de 0.

Q23. Par produit de Cauchy, appliqué aux séries entières (absolument convergentes dans l'intervalle ouvert de convergence) :

$$\forall x \in] -R_\alpha, R_\alpha[\cap] -R_\beta, R_\beta[, \quad \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k x^k \right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k x^k \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \alpha_k \beta_{n-k} \right) x^n.$$

Or, cette somme vaut 1 par hypothèse donc, par unicité d'écriture d'une série entière, on a :

$$\alpha_0\beta_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^n \alpha_k\beta_{n-k} = 0.$$

Comme $\alpha_0 = 1$ par hypothèse, on obtient :

$$\beta_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^n \alpha_k\beta_{n-k} = 0.$$

Q24. Puisque $0 < r < R_\alpha$, par définition du rayon de convergence, la suite $(\alpha_k r^k)_k$ est bornée, donc :

$$\exists M > 0 / \forall k \in \mathbb{N}, \quad |\alpha_k r^k| \leq M \quad \text{i.e.} \quad |\alpha_k| \leq \frac{M}{r^k}.$$

Q25. Notons, pour $k \in \mathbb{N}^*$, H_k l'assertion : « $|\beta_k| \leq \frac{M(M+1)^{k-1}}{r^k}$ ».

— Initialisation : a relation (5) fournit $\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0 = 0$. Donc $\beta_1 = -\alpha_1$ et $|\beta_1| = |\alpha_1| \leq \frac{M}{r}$. Cela montre H_1 .

— Hérité : Prenons k dans \mathbb{N}^* tel que H_1, \dots, H_k soient vraies et montrons que H_{k+1} est vraie.

$$\begin{aligned} |\beta_{k+1}| &= \left| -\sum_{j=0}^k \alpha_{k+1-j} \beta_j \right| \quad (\text{car } \alpha_0 = 1) \\ &\leq \sum_{j=0}^k |\alpha_{k+1-j}| |\beta_j| \\ &\leq \frac{M}{r^{k+1}} + \sum_{j=1}^k \frac{M}{r^{k+1-j}} \times \frac{M(M+1)^{j-1}}{r^j} \quad (\text{d'après Q.24 et l'hyp. de récurrence}) \\ &\leq \frac{M}{r^{k+1}} + \frac{M^2}{r^{k+1}} \left| \frac{(M+1)^k - 1}{(M+1) - 1} \right| \\ &\leq \frac{M(M+1)^k}{r^{k+1}} \end{aligned}$$

Ainsi, H_{k+1} est vraie et l'on a établi le résultat souhaité par récurrence.

Q26. On déduit de la question précédente :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad |\beta_k x^k| \leq \frac{M}{M+1} \left| \frac{(M+1)x}{r} \right|^k.$$

Les théorèmes de comparaison sur les séries permettent d'affirmer que si $\left| \frac{(M+1)x}{r} \right| < 1$, la série géométrique de terme général $\left(\frac{(M+1)x}{r} \right)^k$ converge et donc que la série $\sum \beta_k x^k$ est absolument convergente. La série $\sum \beta_k x^k$ est donc absolument convergente pourvu que $|x| \leq \frac{r}{M+1}$; son rayon de convergence vérifie donc $R_\beta \geq \frac{r}{M+1} > 0$.

Q27. On note : $\forall x \in]0, r[$, $y(x) = \lambda(x)J_0(x)$ avec λ fonction de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, r[$. Ainsi, y est aussi de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, r[$. Comme J_0 est solution de (4), on obtient

$$\forall x \in]0, r[: \quad x^2 y''(x) + x y'(x) + x^2 y(x) = x^2 \lambda''(x) J_0(x) + 2x^2 \lambda'(x) J_0'(x) + x \lambda'(x) J_0(x).$$

De plus, en notant $\forall x \in]0, r[$, $h(x) = x \lambda'(x) J_0^2(x)$, on a

$$\begin{aligned} \forall x \in]0, r[: \quad h'(x) &= \lambda'(x) J_0^2(x) + x \lambda''(x) J_0^2(x) + x \lambda'(x) 2 J_0(x) J_0'(x) \\ &= \frac{J_0(x)}{x} (x^2 y''(x) + x y'(x) + x^2 y(x)). \end{aligned}$$

- Il est donc clair que si y est solution de (4) sur $]0, r[$ alors h est de dérivée nulle sur $]0, r[$.
- Réciproquement, supposons que $h'(x) = 0$ pour tout $x \in]0, r[$. Notons $g : x \mapsto x^2 y''(x) + xy'(x) + x^2 y(x)$.

Supposons qu'il existe $x_0 \in]0, r[$ tel que $g(x_0) \neq 0$. Par continuité, g serait non nulle sur un sous-intervalle de $]0, r[$ centré en x_0 et J_0 serait donc nulle sur cet intervalle. Comme J_0 est solution de $u'' + \frac{1}{x}u' + u = 0$ sur $]0, r[$, J_0 serait identiquement nulle sur $]0, r[$ d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz comme unique solution de (4) s'annulant ainsi que sa dérivée en x_0 . Elle serait donc nulle en 0 par continuité. Cela contredirait la définition de J_0 ($c_0 = 1$). Donc g est nulle et y est solution de (4) sur $]0, r[$.

Q28. Par théorème sur le produit de Cauchy des séries entières, J_0^2 est somme d'une série entière de rayon $+\infty$. De plus, $J_0^2(0) = 1$.

Q29. Cherchons une fonction λ et un réel $r > 0$ tels que $\forall x \in]0, r[: xJ_0^2(x)\lambda'(x) = 1$.

La question **Q27.** nous assurera alors que $(x \mapsto \lambda(x)J_0(x))$ est solution de (4) sur $]0, r[$.

La question **Q28.** permet d'appliquer le paragraphe sur l'inverse d'une série entière non nulle en 0 à J_0^2 .

Il existe donc une série entière $\sum \beta_k x^k$ de rayon $r > 0$ et telle que $\beta_0 = 1$ qui vérifie

$$\forall x \in]0, r[: J_0^2(x) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k x^k \right) = 1, \quad \therefore \quad xJ_0^2(x) \left(\frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k x^{k-1} \right) = 1.$$

En prenant

$$\forall x \in]0, r[: \lambda(x) = \ln(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k \frac{x^k}{k},$$

on obtient bien

$$\forall x \in]0, r[: xJ_0^2(x)\lambda'(x) = 1.$$

Notons

$$\forall x \in]0, r[: \eta(x) = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k \frac{x^k}{k} \right) \times J_0(x).$$

Par produit de Cauchy, η est la somme d'une série entière de rayon $R_\eta > 0$ et, d'après la question **Q27.**,

$$(J_1 : x \mapsto \eta(x) + \ln(x) J_0(x)) \text{ est solution de (4) sur }]0, R_\eta[.$$

Q30. Puisque $J_0(0) = 1$, la fonction $J_1 = \eta + J_0 \times \ln$ n'est pas bornée sur $]0, R_\eta[$. D'après la question **Q22.**, la famille (J_0, J_1) est donc libre dans l'espace vectoriel des fonctions de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, R_\eta[$ et l'on a une base de solutions de (4). On en déduit que l'ensemble des solutions de (4) sur $]0, R_\eta[$ est

$$\{aJ_0 + b(\eta + J_0 \times \ln) / (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \text{vect}(J_0, \eta + J_0 \times \ln).$$

PROBLÈME 2

Q31. La variable aléatoire X admet une espérance. De fait, c'est évident si $X(\Omega)$ est fini. Si $X(\Omega)$ est dénombrable, et si $\{x_0, x_1, \dots\}$ en est une énumération, l'espérance de X est, par définition, la somme de la série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n \mathbb{P}(X = x_n)$, pourvu que cette série soit absolument convergente.

Or, $|x_n \mathbb{P}(X = x_n)| \leq \mathbb{P}(X = x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\sum \mathbb{P}(X = x_n)$ est convergente, donc X admet bien une espérance en vertu du théorème de comparaison. Le résultat s'étend immédiatement à

toute variable aléatoire bornée (par majoration, ou en se ramenant à $[-1, 1]$ par normalisation); cela sera utile par la suite.

Q32. Inégalité de Markov. Si Y est une variable aléatoire positive admettant une espérance, alors

$$\forall \alpha > 0: \mathbb{P}(Y \geq \alpha) \leq \frac{\mathbb{E}(Y)}{\alpha}.$$

Démonstration. Cas où $Y(\Omega)$ est fini. La validité des manipulations sur les sommes finies est immédiate.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \sum_{y \in Y(\Omega)} y \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{\substack{y \in Y(\Omega) \\ y < \alpha}} y \mathbb{P}(Y = y) + \sum_{\substack{y \in Y(\Omega) \\ y \geq \alpha}} y \mathbb{P}(Y = y) \\ &\underset{[Y(\Omega) \subset \mathbb{R}_+]}{\geq} \sum_{\substack{y \in X(\Omega) \\ y \geq \alpha}} y \mathbb{P}(Y = y) \geq \sum_{\substack{y \in Y(\Omega) \\ y \geq \alpha}} \alpha \mathbb{P}(Y = y) = \alpha \mathbb{P}(Y \geq \alpha). \end{aligned}$$

Cas où $Y(\Omega)$ est infini dénombrable. Le formalisme est un peu différent, mais la démonstration est intrinsèquement la même. On peut par exemple utiliser les fonctions indicatrices et la croissance de l'espérance :

$$Y = Y \mathcal{K}_{(Y < \alpha)} + Y \mathcal{K}_{(Y \geq \alpha)} \geq 0 + \alpha \mathcal{K}_{(Y \geq \alpha)} \text{ et } \mathbb{E}(Y) \geq \mathbb{E}(\alpha \mathcal{K}_{(Y \geq \alpha)}) = \alpha \mathbb{P}(Y \geq \alpha).$$

■

Q33. Comme X admet une espérance, il en va de même de $|X|$, à qui l'on peut appliquer l'inégalité de Markov, puisqu'elle est positive.

Q34. Le fait que $tn > 0$, la croissance de l'exponentielle, puis l'inégalité de Markov, appliquée à la variable aléatoire positive bornée (donc admettant une espérance) e^{tnS_n} , donnent

$$\mathbb{P}(S_n \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(tnS_n \geq tn\varepsilon) = \mathbb{P}(e^{tnS_n} \geq e^{tn\varepsilon}) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{tnS_n})}{e^{tn\varepsilon}}.$$

Or, $e^{tnS_n} = \prod_{i=1}^n e^{tX_i}$ et les variables aléatoires e^{tX_i} sont bornées, donc admettent une espérance. Alors, l'indépendance des X_i donne

$$\mathbb{E}(e^{tnS_n}) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(e^{tX_i}) = [\mathbb{E}(e^{tX})]^n.$$

Q35. De $g_a(x) = P(x) - a^x$ avec $P \in \mathbb{R}_1[X]$, on tire que g_a est de classe \mathcal{C}^∞ et que $g_a''(x) = -(\ln a)^2 a^x < 0$, ce qui montre que g_a' est strictement décroissante. Comme

$$g_a(-1) = a^{-1} - a^{-1} = 0 = a - a = g_a(1),$$

le théorème de Rolle entraîne que g_a' s'annule au moins une fois sur $] -1, 1[$. Comme g_a' est strictement décroissante, g_a' s'annule une seule fois et est d'abord positive, puis négative. Ainsi, il existe $x_0 \in] -1, 1[$ tel que g_a est strictement croissante sur $[-1, x_0]$ et strictement décroissante sur $[x_0, 1]$. En particulier, g_a est positive sur $[-1, 1]$. Notons que l'hypothèse $a > 0$ suffit.

Q36. Soit $t > 0$. En prenant $a = e^t > 1$, l'inégalité $g_a(x) \geq 0$ donne

$$\frac{1-x}{2} e^{-t} + \frac{1+x}{2} e^t - e^{tx} \geq 0,$$

d'où l'inégalité demandée en ajoutant e^{tx} des deux côtés.

Q37. Par croissance de l'espérance et en utilisant le fait que $\mathbb{E}(X) = 0$, l'inégalité de la question 36 donne

$$e^{tX} \leq \frac{1-X}{2}e^{-t} + \frac{1+X}{2}e^t = \operatorname{ch} t + (\operatorname{sh} t)X \quad \therefore \quad \mathbb{E}(e^{tX}) \leq \operatorname{ch} t + (\operatorname{sh} t)\mathbb{E}(X) = \operatorname{ch} t.$$

Q38. Si $k \geq 1$, on a

$$(2k)! = k! \prod_{j=1}^k (k+j) \geq k! \prod_{j=1}^k 2 = 2^k k!,$$

et l'inégalité est aussi vraie pour $k = 0$ ($1 = 1$). En en prenant l'inverse, puis en multipliant par la quantité positive t^{2k} , il vient $\frac{t^{2k}}{(2k)!} \leq \frac{1}{k!} \left(\frac{t^2}{2}\right)^k$.

En utilisant alors la question 37, il vient, en utilisant les développements en série entière du cosinus hyperbolique et de l'exponentielle, lesquels sont de rayon de convergence infini :

$$\mathbb{E}(e^{tX}) \leq \operatorname{ch} t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{t^2}{2}\right)^k = e^{t^2/2}.$$

Q39. Posons $\varphi(t) = e^{-nt\varepsilon + n\frac{t^2}{2}}$. Alors, φ est de classe \mathcal{C}^∞ et $\varphi'(t) = n(t - \varepsilon)\varphi(t)$ est du signe de $t - \varepsilon$. Il s'ensuit que φ admet un minimum en ε et que ce minimum vaut $\varphi(\varepsilon) = e^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}}$.

Q40. Les questions précédentes donnent une majoration de $\mathbb{P}(S_n \geq \varepsilon)$ valable pour tout $t > 0$:

$$\mathbb{P}(S_n \geq \varepsilon) \underset{[Q.34]}{\leq} e^{-nt\varepsilon} \mathbb{E}(e^{tX})^n \underset{[Q38]}{\leq} e^{-nt\varepsilon} \times e^{\frac{nt^2}{2}}.$$

En particulier, pour $t = \varepsilon$, choix optimal en vertu de la question 39, il vient $\mathbb{P}(S_n \geq \varepsilon) \leq e^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}}$.

Les v.a. $-X_i$ vérifient les mêmes hypothèses que les X_i (elles sont à valeurs dans $[-1, 1]$ et indépendantes). Il s'ensuit que l'on peut appliquer la majoration ci-dessus à $-S_n$, ce qui donne $\mathbb{P}(-S_n \geq \varepsilon) \leq e^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}}$. Alors,

$$\mathbb{P}(|S_n| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(S_n \leq -\varepsilon) + \mathbb{P}(S_n \geq \varepsilon) \leq 2e^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}}.$$

Q41. La croissance des mesures de probabilité et la question 40 donnent la majoration

$$\mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(|S_n| \geq \varepsilon) \leq 2e^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}}.$$

Le théorème de comparaison et la convergence de la série géométrique de raison $e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}} \in]0, 1[$ assurent alors la convergence de la série de terme général $\mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon)$.

Q42. $\{\omega \in \Omega; |S_m(\omega)| > \varepsilon\} = S_m^{-1}(]-\infty, -\varepsilon[) \cup S_m^{-1}(] \varepsilon, +\infty[)$ est la réunion de deux événements, donc un événement. Alors, B_n est une réunion dénombrable d'événements, donc un événement.

Par ailleurs, $\mathbb{P}(B_n) \leq \sum_{m=n}^{\infty} \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega; |S_m(\omega)| > \varepsilon\})$, reste d'une série convergente d'après la question 41. Comme la suite $(B_n)_n$ est décroissante, il s'ensuit

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B_n) = 0.$$

Q43. Posons pour plus de clarté $B_n(\varepsilon) = B_n$. On peut écrire

$$\Omega_k = \left\{ \omega \in \Omega; \exists n \in \mathbb{N}^*, \forall m \geq n: |S_m(\omega)| \leq \frac{1}{k} \right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} \left\{ \omega \in \Omega; |S_m(\omega)| \leq \frac{1}{k} \right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{B_n(1/k)}$$

donc Ω_k est une réunion dénombrable d'événements et donc un événement. On peut par ailleurs écrire

$$A = \left\{ \omega \in \Omega ; \forall k \in \mathbb{N}^*, \exists n \in \mathbb{N}^*, \forall m \geq n : |S_m(\omega)| \leq \frac{1}{k} \right\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \Omega_k,$$

ce qui montre que A est un événement.

Q44. En reprenant l'expression de Ω_k obtenue à la question 43, le passage au complémentaire donne $\overline{\Omega_k} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n(1/k)$ et en appliquant ce que l'on a montré à la question 42, on obtient $\mathbb{P}(\overline{\Omega_k}) = 0$, d'où $\mathbb{P}(\Omega_k) = 1$.

Enfin, $(|S_m| \leq \frac{1}{k}) \supset (|S_m| \leq \frac{1}{k+1})$, ce qui entraîne que la suite d'événements $(\Omega_k)_k$ est décroissante. On peut alors conclure :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P} \left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \Omega_k \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\Omega_k) = 1.$$

Autrement dit, $(S_n)_n$ converge presque sûrement vers 0. Ce résultat est la *loi forte des grands nombres*.