1. **(a)** Soit $a \in T_1(\mathbb{R})$. Alors il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $a = b^2$. Par suite, $a \in [0, +\infty[$. Ceci montre que $T_1(\mathbb{R}) \subset [0, +\infty[$.

Soit $a \in [0, +\infty[$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $b = \sqrt[n]{a}$. Alors $b \in \mathbb{R}$ et $b^n = a$. Par suite, $a \in T_1(\mathbb{R})$. Ceci montre que $[0, +\infty[\subset T_1(\mathbb{R})$. Finalement

$$\boxed{T_1(\mathbb{R}) = [0, +\infty[.}$$

(b) Puisque $b \neq 0$, b admet exactement n racines n-ièmes deux à deux distinctes. Les racines n-ièmes de b sont les nombres complexes de la forme $\sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$, $k \in [\![0, n-1]\!]$.

(c) Soit $a \in \mathbb{C}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $a = 0$, alors $0^n = a$ et si $a \neq 0$, d'après la question précédente, il existe $b \in \mathbb{C}$ tel que $b^n = a$. Donc $a \in T_1(\mathbb{C}$. Ceci montre que $\mathbb{C} \subset T_1(\mathbb{C})$. Comme d'autre part, $T_1(\mathbb{C} \subset \mathbb{C}$, on a montré que

$$\boxed{T_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}.}$$

2. **(a)** Soit $A \in T_p(\mathbb{K})$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe $B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ telle que $B^n = A$. Mais alors, $\det(A) = \det(B^n) = (\det(B))^n$. De plus, $\det(B) \in \mathbb{K}$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $b \in \mathbb{K}$ tel que $b^n = \det(A)$ et donc $\det(A) \in T_1(\mathbb{K})$.

(b) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. $\det(A) = -1 < 0$ et donc $\det(A) \notin T_1(\mathbb{R})$ d'après la question 1). Mais alors, $A \notin T_2(\mathbb{R})$ d'après la question précédente.

3. $\det(A) = 2 \in T_1(\mathbb{R})$.

Soit $B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Posons $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B) = (\lambda, \mu)$. Si $B^2 = A$, alors $(\lambda^2, \mu^2) = (-1, -2)$ et donc

$$(\lambda, \mu) \in \left\{\left(i, i\sqrt{2}\right), \left(-i, i\sqrt{2}\right), \left(i, -i\sqrt{2}\right), \left(-i, -i\sqrt{2}\right)\right\}.$$

Ceci est impossible car, B étant une matrice réelle, si B admet une valeur propre α non réelle, alors B admet aussi $\overline{\alpha}$ pour valeur propre. Il n'existe donc pas de matrice $B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$. On en déduit que $A \notin T_2(\mathbb{R})$.

4. **(a)** $\chi_A = \begin{vmatrix} -X & 3 & 2 \\ -2 & 5-X & 2 \\ 2 & -3 & -X \end{vmatrix} = (-X)(X^2-5X+6)+2(-3X+6)+2(2X-4) = -X(X-2)(X-3)-6(X-2)+4(X-2) = (X-2)(-X(X-3)-2) = (X-2)(-X^2+3X-2) = -(X-1)(X-2)^2$. Le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{R}$. A admet 1 pour valeur propre simple et 2 pour valeur propre double. Par suite,

$$A \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{R} \Leftrightarrow \dim\left(\mathrm{Ker}(A - 2I_3)\right) = 2 \Leftrightarrow \mathrm{rg}(A - 2I_3) = 1.$$

Or, $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$. $C_2 = -\frac{2}{3}C_1$, $C_3 = -C_1$ et $C_1 \neq 0$. Donc $\mathrm{rg}(A - 2I_3) = 1$. On en déduit que

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{R}.}$$

(b) Par suite, il existe une matrice $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$ où $D = \mathrm{diag}(1, 2, 2)$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ puis $B = P\mathrm{diag}\left(1, \sqrt[n]{2}, \sqrt[n]{2}\right)P^{-1}$. B est une matrice réelle et

$$B^n = \left(P\mathrm{diag}\left(1, \sqrt[n]{2}, \sqrt[n]{2}\right)P^{-1}\right)^n = P\left(\mathrm{diag}\left(1, \sqrt[n]{2}, \sqrt[n]{2}\right)\right)^n P^{-1} = PDP^{-1} = A.$$

Ceci montre que A est TP$\mathbb{R}$.

(c) On peut prendre $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ puis $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

Soit $B_2 = P\mathrm{diag}\left(1, \sqrt{2}, \sqrt{2}\right)P^{-1}$.

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & 2\sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2-\sqrt{2} & -3+3\sqrt{2} & -2+2\sqrt{2} \\ 2-2\sqrt{2} & -3+4\sqrt{2} & -2+2\sqrt{2} \\ -2+2\sqrt{2} & 3-3\sqrt{2} & 2-\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

La matrice $B_2 = \begin{pmatrix} 2-\sqrt{2} & -3+3\sqrt{2} & -2+2\sqrt{2} \\ 2-2\sqrt{2} & -3+4\sqrt{2} & -2+2\sqrt{2} \\ -2+2\sqrt{2} & 3-3\sqrt{2} & 2-\sqrt{2} \end{pmatrix}$ est une matrice réelle telle que $B_2^2 = A$. En remplaçant $\sqrt{2}$ par $\sqrt[3]{2}$, la matrice $B_3 = \begin{pmatrix} 2-\sqrt[3]{2} & -3+3\sqrt[3]{2} & -2+2\sqrt[3]{2} \\ 2-2\sqrt[3]{2} & -3+4\sqrt[3]{2} & -2+2\sqrt[3]{2} \\ -2+2\sqrt[3]{2} & 3-3\sqrt[3]{2} & 2-\sqrt[3]{2} \end{pmatrix}$ est une matrice réelle telle que $B_3^3 = A$.

5. **(a)** On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne usuelle et de son orientation usuelle. A est alors la matrice dans la base canonique de $-\mathrm{Id}$ qui est la rotation d'angle π.

(b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ puis $B = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \end{pmatrix}$. Alors, B^n est la matrice dans la base canonique de la rotation d'angle $n \times \dfrac{\pi}{n} = \pi$ et donc $B^n = A$. Ceci montre que A est TR$\mathbb{R}$.

6. **(a)** Il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^k = 0$. Donc le polynôme X^k est annulateur de N. On sait que les valeurs propres de N dans $\mathbb{C}$ sont à choisir parmi les racines de ce polynôme annulateur. Donc, 0 est l'unique valeur propre de N.

Le polynôme caractéristique de N est le polynôme de coefficient dominant $(-1)^p$, de degré p, admettant 0 pour unique racine. On en déduit que $\chi_N = (-1)^p X^p$.

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_N(N) = 0$ ce qui fournit $N^p = 0$.

(b) Supposons de plus que N soit TP$\mathbb{K}$. Il existe une matrice $B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ telle que $N = B^2$. Mais alors, $B^{2p} = N^p = 0$. La matrice B est donc nilpotente. La question précédente fournit alors $N = B^p = 0$. On a montré que si N est TP$\mathbb{K}$, alors $N = 0$.

Partie II : le cas où le polynôme caractéristique est scindé

7. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_u(u) = 0$ ou encore $\displaystyle\prod_{i=1}^{p} (u - \lambda_i \mathrm{Id}_{\mathbb{K}^p})^{r_i} = 0$. De plus, les polynômes $(X - \lambda_i)^{r_i}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, sont deux à deux premiers entre eux. D'après le théorème de décomposition des noyaux,

$$\mathbb{K}^p = \mathrm{Ker}\,(u - \lambda_1 \mathrm{Id}_{\mathbb{K}^p})^{r_1} \oplus \ldots \mathrm{Ker}\,(u - \lambda_k \mathrm{Id}_{\mathbb{K}^p})^{r_k} = C_1 \oplus \ldots \oplus C_k.$$

8. **(a)** Puisque v commute avec u, v commute avec tout polynôme en u et donc v commute avec $Q(u)$. On sait alors que $\mathrm{Ker}(Q(u))$ est stable par v. Redémontrons-le.

Soit $x \in \mathrm{Ker}(Q(u))$. Alors $Q(u)(x) = 0$ puis

$$Q(u)(v(x)) = V(Q(u)(x)) = v(0) = 0,$$

et donc $v(x) \in \mathrm{Ker}(Q(u))$.

(b) Soit $i \in [\![1, k]\!]$. u commute avec $(u - \lambda_i \mathrm{Id}_{\mathbb{K}^p})^{r_i}$ qui est un polynôme en u. Donc, u laisse stable $\mathrm{Ker}\,(u - \lambda_i \mathrm{Id}_{\mathbb{K}^p})^{r_i} = C_i$.

9. Soit $i \in [\![1, k]\!]$. Posons $v_i = u_{C_i} - \lambda_i \mathrm{Id}_{C_i}$. Soit $x \in C_i = \mathrm{Ker}\,(u - \lambda_i \mathrm{Id}_{\mathbb{K}^p})^{r_i} = \mathrm{Ker}(v_i)^{r_i}$. Par définition, $v_i^{r_i}(x) = 0$. Ainsi, $v_i^{r_i} = 0$ et donc v_i est nilpotent d'indice inférieur ou égal à r_i.

10. Soit $\mathscr{B}'$ une base de $\mathbb{K}^p$ adaptée à la décomposition $\mathbb{K}^p = C_1 \oplus \ldots \oplus C_p$ puis P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. Posons $M = P^{-1}AP$.

D'après la question 8)a), les C_i sont stables par u. On en déduit que la matrice M est diagonale par blocs :

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & M_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & M_k \end{pmatrix}$$

où pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, $M_i \in \mathscr{M}_{p_i}(\mathscr{K})$ avec $p_i = \mathrm{dim} C_i$.

Pour chaque $i \in [\![1,k]\!]$, posons $N_i = M_i - \lambda_i I_{p_i}$ de sorte que $M_i = \lambda_i I_{p_i} + N_i$. D'après la question 9), la matrice N_i est une matrice nilpotente de $\mathscr{M}_{p_i}(\mathscr{M}_{p_i}(\mathscr{K})$.

Finalement on a écrit A sous la forme $A = P\ \mathrm{diag}\,(\lambda_1 I_{p_1} + N_1, \ldots, \lambda_k I_{p_k} + N_k)\, P^{-1}$ où P est une matrice inversible de $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ et pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, $p_i = \mathrm{dim} C_i$ et N_i est une matrice nilpotente de $\mathscr{M}_{p_i}(\mathbb{K})$.

11. Supposons que pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, $\lambda_i Id_{p_i} + N_i$ soit TP$\mathbb{K}$. Alors pour tout $i \in [\![1,k]\!]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une matrice $B_{i,n} \in \mathscr{M}_{p_i}(\mathbb{K})$ telle que $B_{i,n}^n = \lambda_i Id_{p_i} + N_i$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $B_n = P\ \mathrm{diag}(B_{1,n}, \ldots, B_{k,n})P^{-1} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$.

$$\begin{aligned} B_n^n &= P\,(\mathrm{diag}(B_{1,n}, \ldots, B_{k,n}))^n\, P^{-1} \\ &= P\ \mathrm{diag}(B_{1,n}^n, \ldots, B_{k,n}^n)P^{-1} \text{ (calcul par blocs)} \\ &= P\ \mathrm{diag}(\lambda_1 I_{p_1} + N_1, \ldots, B\lambda_k I_{p_K} + N_k)P^{-1} = A. \end{aligned}$$

On en déduit que A est TP$\mathbb{K}$

Partie III : le cas des matrices unipotentes

12. **(a)** La division euclidienne de V par X^p fournit deux polynômes Q et R tels que $V = X^p \times Q + R$ et $\deg(R) \leqslant p-1$. Quand x tend vers 0, $V(x) = o(x^p)$ et en particulier, $V(x) = o(x^{p-1})$. D'autre part, $x^p Q(x) = o(x^{p-1})$. Donc, quand x tend vers 0, $R(x) = V(x) - x^p Q(x) = o(x^{p-1})$. Puisque R est de degré au plus $p-1$, cette dernière égalité s'écrit plus explicitement

$$R(x) + o(x^{p-1}) \underset{x \to 0}{=} 0 + o(x^{p-1}).$$

Par unicité des coefficients d'un développement limité, on en déduit que les coefficients de R sont nuls ou encore que R est nul. Finalement, il existe un polynôme Q tel que $V = X^p \times Q$.

(b) Un développement limité de $(1+x)^{1/n}$ en 0 à l'ordre p s'écrit

$$(1+x)^{1/n} \underset{x \to 0}{=} U(x) + o(x^p),$$

où U est un polynôme de degré inférieur ou égal à p. En élévant les deux membres à l'exposant n, on obtient

$$1 + x \underset{x \to 0}{=} (U(x) + o(x^p))^n \underset{x \to 0}{=} (U(x))^n + o(x^p),$$

(développement limité d'une composée).

(c) Quand x tend vers 0 , $1+x-(U(x))^n = o\,(x^p)$. D'après la question 12)a), il existe un polynôme Q tel que $1+X-U^n = X^p \times Q$ ou encore $1 + X = U^n + X^p \times Q$.

13. **(a)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, il existe deux polynômes U et Q (dépendant de n) tels que $1 + X = U^n + X^p \times Q$. En évaluant en la matrice N, on obtient

$$I_p + N = (U(N))^n + N^p \times Q(N) = (U(N))^n,$$

car d'après la question 6)a), $N^p = 0$.

Ainsi, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une matrice $U(N) \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ telle que $B^n = I_p + N$. La matrice $I_p + N$ est donc TP$\mathbb{K}$.

(b) Soit $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tel que λ soit TP$\mathbb{K}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $\mu^n = \lambda$.

D'autre part, la matrice $\dfrac{1}{\lambda}N$ est nilpotente car $\left(\dfrac{1}{\lambda}N\right)^p = \dfrac{1}{\lambda^p}N^p = 0$. D'après la question précédente, il existe une matrice $B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ telle que $B^n = I_p + \dfrac{1}{\lambda}N$.

Soit $B' = \mu B$. B' est dans $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ et $B'^n = \mu^n B^n = \lambda\left(I_p + \dfrac{1}{\lambda}N\right) = \lambda I_p + N$. Ceci montre que $\lambda I_p + N$ est TP$\mathbb{K}$.

14. **(a)** Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Alors les λ_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, de la partie II sont tous non nuls. D'autre part, chaque λ_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, est TP$\mathbb{C}$ d'après la question 1)c).
D'après la question précédente, chaque matrice $\lambda_i I_{p_i} + N_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$, de la partie II est TP$\mathbb{C}$. La question 11) permet alors d'affirmer que A est TP$\mathbb{C}$.

(b) Si $p \geqslant 2$, la matrice élémentaire $E_{1,2}$ est nilpotente et non nulle. La question 6)a) montre que la matrice $E_{1,2}$ n'est pas TP$\mathbb{C}$. Donc, si $p \geqslant 2$, $T_p(\mathbb{C}) \neq \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$. Par contre, d'après la question 1)c), $T_1(\mathbb{C}) = \mathscr{M}_1(\mathbb{C})$.

15. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_3 + N & 0_{3,1} \\ 0_{1,3} & 0 \end{pmatrix}$ où $N = E_{1,2}$. D'après la question 13)a), la matrice $I_3 + N$ est TP$\mathbb{R}$. Un calcul par blocs montre alors que A est TR$\mathbb{R}$.

Maintenant, 0 est valeur propre de A et donc A n'est pas inversible. D'autre part, 1 est valeur propre triple de A mais $\mathrm{rg}(A - I_3) = 2 > 1$ et donc A n'est pas diagonalisable.

