Éléments de corrections.

Exercice :

1. **a.** Pour montrer que L est bien définie, il faut montrer qu'il existe une unique une primitive de f dont l'intégrale est nulle sur $[a, b]$.

   Existence : f est continue sur $[a, b]$ donc admet des primitives par le théorème fondamental de l'analyse. Soit par exemple $F_1 : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. On pose alors $F(x) = F_1(x) - \int_a^b F_1(t)\,\mathrm{d}t$. Par construction, F est une primitive de f et $\int_a^b F(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

   Unicité : si F_1 et F_2 conviennent, alors $F_1 - F_2$ est constante. De plus, $\int_a^b (F_1 - F_2) = 0$ donc cette constante est nulle. Finalement, $F_1 = F_2$.

   Pour montrer que L est un endomorphisme de E_0, il faut montrer que $f(E_0) \subset E_0$ et que f est linéaire.

   Par le théorème fondamental de l'analyse, $L(f)$ est dérivable (et $L(f)' = f$), donc continue sur $[a, b]$. Donc $L(f) \in E_0$.

   De plus, si f et g sont dans E_0 et $\lambda \in \mathbb{R}$, $L(f) + \lambda L(g)$ est une primitive de $f + \lambda g$ et de plus, par linéarité de l'intégrale, $\int_{[a,b]} L(f) + \lambda L(g) = 0$. Par unicité démontrée précédemment, $L(f + \lambda g) = L(f) + \lambda L(g)$.

   Donc L est un endomorphisme.

   Enfin, si f est dans $\ker L$, alors $L(f) = 0$. En particulier, $(L(f))' = 0' = 0 = f$. Donc f est nulle.

   b. Par théorème fondamental de l'analyse, comme f est continue sur $[a, b]$, $L(f)$ est de classe C^1. Donc $L(E_0) \subset E_1$.

   Par contre $L_{|E_1}$ est à valeurs dans C^2 (une primitive d'une fonction C^1 est de classe C^2 toujours par théorème fondamental de l'analyse). Il suffit donc de considérer une fonction de classe C^1 mais pas de classe C^2 pour conclure que $L(E_1) \neq E_1$.

   La fonction $x :\mapsto x^3 \sin(1/x)$ sur $[0, 1]$ convient par exemple.

   a. $L(f)(t) = \int_a^t f(u)\,\mathrm{d}u + C$ avec $C = -\dfrac{1}{b-a} \int_a^b \left(\int_a^x f(u)\,\mathrm{d}u\right) \mathrm{d}x$ pour que $\int L(f) = 0$.

   Alors $L(f)(t) = \int_a^t f(u)\,\mathrm{d}u - \dfrac{1}{b-a} \int_a^b \left(\int_a^x f(u)\,\mathrm{d}u\right) \mathrm{d}x$

   $= \int_a^b \left(\int_a^t f(u)\,\mathrm{d}u\right) \mathrm{d}x - \dfrac{1}{b-a} \int_a^b \left(\int_a^x f(u)\,\mathrm{d}u\right) \mathrm{d}x$ car $\int_a^t f(u)\,\mathrm{d}u$ ne dépend pas de x...

   $= \dfrac{1}{b-a} \int_a^b \left(\int_x^t f(u)\,\mathrm{d}u\right) \mathrm{d}x$ par relation de Chasles

   b. La fonction $L(f)$ est continue sur le segment $[a, b]$ donc elle y est bornée et atteint ses deux bornes en x_i pour le minimum et x_s pour le maximum...

   c. $\int_a^b |x - t|\,\mathrm{d}t = \int_a^x (x - t)\,\mathrm{d}t + \int_x^b (t - x)\,\mathrm{d}t = x^2 - (a + b)x + \dfrac{a^2 + b^2}{2}$.

   qui est un trinôme du second degré en x qui atteint son maximum sur le segment $[a, b]$ en a et/ou en b. Ce maximum est $\alpha = \dfrac{(b-a)^2}{2}$.

   d. Alors pour tout $t \in [a, b]$, $|L(f)(t)| \leq |\dfrac{1}{b-a} \int_a^b \int_x^t f(u)\,\mathrm{d}u)\,\mathrm{d}x| \leq \dfrac{1}{b-a} \int_a^b | \int_x^t f(u)\,\mathrm{d}u|\,\mathrm{d}x$

   $\leq \dfrac{||f||}{b-a} \int_a^b |x - t|\,\mathrm{d}x \leq \dfrac{b-a}{2} ||f||$.

   Donc $||L(f)|| \leq \dfrac{b-a}{2} ||f||$.

   L'application linéaire L est donc lipschitzienne, donc continue.

e. D'après ce qui précède, si $||f|| \leq 1$, alors $||L(f)|| \leq \dfrac{b-a}{2}$. Donc $|||L||| \leq \dfrac{b-a}{2}$

De plus, on vérifie que $||P_0|| = 1$ et que $||L(P_0)|| = \dfrac{b-a}{2}$. Donc $|||L||| \geq \dfrac{b-a}{2}$.

Finalement, $|||L||| = \dfrac{b-a}{2}$

2. a. Calculatoire. Bien penser à remettre sous l'expression d'une fonction en $t-a$ avant de continuer pour simplifier les calculs.

On trouve : $P_1(t) = (t-a) - \dfrac{b-a}{2}$, $P_2(t) = \dfrac{(t-a)^2}{2} - \dfrac{(b-a)(t-a)}{2} + \dfrac{(b-a)^2}{12}$ et $P_3(t) = \dfrac{(t-a)^3}{6} - \dfrac{(b-a)(t-a)^2}{4} + \dfrac{(b-a)^2(t-a)}{12}$.

b. Par récurrence. pour $n = 1$, la propriété est vérifiée.

Soit $n \geq 1$. La dérivée de P_{n+1} est P_n donc le polynôme $Q_{n+1} = P_{n+1}(X+b-a) - P_{n+1}(X) - (b-a)\dfrac{(X-a)^n}{n!}$ admet pour dérivée le polynôme nul par hypothèse de récurrence.

Donc il est constant. De plus $P_{n+1}(b) - P_{n+1}(a) = \int_a^b P_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b L(P_{n-1})(t)\,\mathrm{d}t = 0$ par hypothèse sur l'endomorphisme L.

Donc $Q_{n+1}(a) = 0$ donc $Q = 0$.

Récurrence établie.

3. a. C'est du cours.

b. Intégrons $\phi(P_n, P_m)$ par parties.

$\dfrac{1}{b-a}\int_a^b P_n(t)P_m(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{b-a}\left([P_n(t)P_{m+1}(t)]_a^b - \int_a^b P_{n-1}(t)P_{m+1}(t)\,\mathrm{d}t\right)$

Or on vient de voir que $P_k(a) = P_k(b)$ pour tout $k \geq 2$.

On a donc $\phi(P_n, P_m) = -\phi(P_{n-1}, P_{m+1})$ pour tout $n \geq 2$ et $m \geq 2$. Par récurrence, on a alors $\phi(P_n, P_m) = (-1)^{n+1}\phi(P_1, P_{m+n-1}) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{b-a}\int_a^b P_{m+n+1}P_1$

$= \dfrac{(-1)^{n+1}}{b-a}\left(P_{m+n}(b)P_1(b) - P_{m+n}(a)P_1(a)\right)$ par intégration par parties et car $\int_a^b P_{m+n} = 0$ par définition de L.

$= \dfrac{(-1)^{n+1}}{b-a}P_{m+n}(a)(b-a)$ car $P_{m+n}(a) = P_{m+n}(b)$.

D'où le résultat pour $m \geq n > 0$.

Enfin, $\phi(P_n, P_0) = \dfrac{1}{b-a}\int_{[a,b]} P_n = 0$ par définition de L.