DS 8 : 4H

Mars 2018

L'usage des calculatrices n'est pas autorisé

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction, même si tout résultat qui n'est pas explicitement dans le cours de MPSI ou de MP doit être démontré. Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Consignes à respecter sous peine d'être pénalisé :

• Changer de copie (ou au moins de feuille) à chaque exercice ou partie d'un problème.

• Numéroter les questions (et le cas échéant la partie).

• Souligner les résultats intermédiaires dans une démonstration à tiroirs, faire une phrase de conclusion et encadrer le résultat.

Exercice

On désigne par E_0 le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ où a et b sont donnés avec $a<b$, muni de la norme

$$||f|| = \sup_{[a,b]} |f| = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|.$$

On désigne par E_1 le sous-espace de E_0 des applications de classe C^1 sur $[a,b]$.

Pour tout $f\in E_0$, on désigne par $L(f)$ la primitive F de f qui vérifie $\displaystyle\int_a^b F(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

On pose $L^0=\mathrm{Id}$ (application identité) et pour $n\geq 1$, $L^n = L\circ L^{n-1}$.

On désigne par $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par $P_0=1$ et $P_n=L^n(P_0)$ où l'on désigne par le même symbole le polynôme et la restriction de sa fonction polynomiale associée définie sur $[a,b]$.

1. **a.** Montrer que L est bien définie, est un endomorphisme de E_0 et déterminer son noyau $\ker L$.

b. Montrer que l'image de L est incluse dans E_1. La restriction à E_1 de cet endomorphisme L définit-elle un automorphisme de E_1 (justifier avec précision votre réponse) ?

2. Soit $f\in E_0$.

a. Démontrer l'égalité $\displaystyle L(f)(t) = \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(\int_x^t f(u)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x$ pour tout t dans $[a,b]$.

b. Démontrer l'existence de deux réels x_i et x_s dans $[a,b]$ tels que pour tout t dans $[a,b]$:

$$L(f)(x_i)\leq L(f)(t)\leq L(f)(x_s).$$

c. Calculer la borne supérieure α de $\displaystyle\int_a^b |x-t|\,\mathrm{d}t$ lorsque x décrit $[a,b]$.

d. L'endomorphisme L est-il continu (justifier la réponse) ?

e. Calculer $||L(P_0)||$ ainsi que $|||L||| = \sup_{f\in E_0, ||f||\leq 1} ||L(f)||$.

3. **a.** Exprimer P_1, P_2 et P_3 en fonction de la variable $t-a$.

b. Établir l'égalité $\displaystyle P_n(X+b-a)-P_n(X) = (b-a)\frac{(X-a)^{n-1}}{(n-1)!}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

4. Soit $\mathcal{P}=\mathbb{R}[X]$. On définit l'application sur $\mathcal{P}^2$:

$$\phi : (P,Q)\mapsto \phi(P,Q) = \frac{1}{b-a}\int_a^b P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

a. Montrer que ϕ est un produit scalaire.

b. Montrer que pour tout $k\geq 2$, $P_k(a)=P_k(b)$.

5. Montrer, par exemple à l'aide d'intégrations par parties, que si m,n sont deux entiers vérifiant les relations $m\geq n>0$, on a :

$$\phi(P_n,P_m) = (-1)^{n+1}P_{n+m}(a) \text{ et } \phi(P_n,P_0)=0.$$

Problème

Notations et objectifs
Dans tout le texte, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et p un entier naturel non nul.
On note $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$ espace vectoriel des matrices carrées de taille p à coefficients dans $\mathbb{K}$ et I_p la matrice unité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.
On pourra confondre $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}$.
Une matrice N de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est dite nilpotente s'il existe un entier naturel r tel que $N^r = 0$.
Si $M_1, \ldots, M_k$ sont des matrices carrées, la matrice $\operatorname{diag}(M_1, \ldots M_k)$ désigne la matrice diagonale par blocs dont les blocs diagonaux sont $M_1, \ldots M_k$.
Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on note id_E l'application identité sur E.
Enfin, on note $\mathbb{K}[X]$ la $\mathbb{K}$-algèbre des polynômes à coefficients dans K.
On dit qu'une matrice A de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est "**toute-puissante sur** $\mathbb{K}$" et on notera en abrégé TP$\mathbb{K}$ si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une matrice B de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telle que $A = B^n$.
On note $T_p(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ toutes-puissantes sur $\mathbb{K}$:

$$T_p(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) | \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}), A = B^n\}.$$

L'objectif principal du sujet est d'établir le résultat suivant :"toute matrice inversible de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est $TP\mathbb{C}$.

Partie 1 : quelques exemples

1. Le cas de la taille 1

a. Démontrer que $T_1(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$.

b. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $b = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Donner les racines n-ièmes du nombre complexe b, c'est à dire les solutions de l'équation $z^n = b$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

c. En déduire $T_1(\mathbb{C})$.

2. Une condition nécessaire...

a. Démontrer que si $A \in T_p(\mathbb{K})$, alors $\det A \in T_1(\mathbb{K})$.

b. En déduire un exemple de matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui n'est pas $TP\mathbb{R}$.

3. ... mais pas suffisante.
Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Démontrer qu'il n'existe aucune matrice $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$. En déduire que la condition nécessaire de la question précédente n'est pas suffisante.

4. Un cas où A est diagonalisable.
Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Démontrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ (le détail des calculs n'est pas demandé).

b. Démontrer que la matrice A est $TP\mathbb{R}$.

5. Un exemple de nature géométrique
Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a. Justifier que A est la matrice d'une rotation vectorielle dont on précisera une mesure de l'angle.

b. En déduire que A est $TP\mathbb{R}$.

6. Le cas des matrices nilpotentes
Soit N une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

a. Déterminer le polynôme caractéristique de N.

b. Démontrer que si N est $TP\mathbb{K}$, alors N est la matrice nulle.

Partie 2 : le cas où le polynôme caractéristique est scindé

Dans toute cette partie, A désigne une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique noté χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$, c'est à dire de la forme

$$\chi_A = \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{r_i},$$

avec $k, r_1, \ldots, r_k$ des entiers de $\mathbb{N}^*$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ les valeurs propres de A, éléments de $\mathbb{K}$.
On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^p$ dont A est la matrice dans la base $\mathcal{B}$.
Enfin, pour $i \in \{1, \ldots k\}$, on note $C_i = \ker(u - \lambda_i \mathrm{id}_{\mathbb{K}^p})^{r_i}$ que l'on appelle sous-espace caractéristique de u associé à la valeur propre λ_i.

1. Démontrer que $\mathbb{K}^p = C_1 \oplus \cdots \oplus C_k$.

2. **a.** Soit v un endomorphisme de $\mathbb{K}^p$ qui commute avec u et Q un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$. Démontrer que $\ker Q(u)$ est stable par v.

b. En déduire que pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, le sous-espace caractéristique C_i est stable par u. On note ainsi u_{C_i} l'endomorphisme induit par u sur C_i.

3. Soit $i \in \{1, \ldots, k\}$. Justifier que l'application $u_{C_i} - \lambda_i \mathrm{id}_{C_i}$ est un endomorphisme de C_i nilpotent.

4. En déduire que la matrice A peut s'écrire sous la forme

$$A = P\ \mathrm{diag}(\lambda_1 I_{p_1} + N_1, \ldots, \lambda_k I_{p_k} + N_k) P^{-1},$$

avec P une matrice inversible de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}, p_i = \dim C_i$ et N_i est une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_{p_i}(\mathbb{K})$.
On rappelle que $\mathrm{diag}(\lambda_1 I_{p_1} + N_1, \ldots, \lambda_k I_{p_k} + N_k)$ désigne la matrice diagonale par blocs de premier bloc $\lambda_1 I_{p_1} + N_1$, de deuxième bloc $\lambda_2 I_{p_2} + N_2$ et de dernier bloc $\lambda_k I_{p_k} + N_k$.

5. Démontrer que, si pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$ la matrice $\lambda_i I_{p_i} + N_i$ est $TP\mathbb{K}$, alors A est elle-même $TP\mathbb{K}$.

Partie 3 : le cas des matrices unipotentes

Soit N une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Nous allons montrer que la matrice unipotente $I_p + N$ est $TP\mathbb{K}$.
On pourra confondre polynôme et fonction polynôme.
On rappelle que si f est une fonction, la notation $f(x) = o(x^p)$ signifie qu'il existe une fonction ε tendant vers 0 en 0 telle que $f(x) = x^p \varepsilon(x)$ au voisinage de 0.

1. Une application des développements limités

a. Soit V un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $V(x) = o(x^p)$ au voisinage de 0.
Démontrer, à l'aide d'une division euclidienne, qu'il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ tel que $V = X^p \times Q$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer l'existence d'un polynôme U de $\mathbb{R}[X]$ tel que l'on ait, au voisinage de 0 :

$$1 + x = (U(x))^n + o(x^p).$$

(on pourra utiliser un développement limité de $(1+x)^\alpha$).

c. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ tel que

$$1 + X = U^n + X^p \times Q.$$

2. Applications

a. Démontrer que la matrice unipotente $I_p + N$ est $TP\mathbb{K}$.

b. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ non nul. En déduire que si λ est $TP\mathbb{K}$, alors la matrice $\lambda I_p + N$ est $TP\mathbb{K}$.

3. Le résultat annoncé

a. Conclure que toute matrice inversible de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est $TP\mathbb{C}$.

b. Toute matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est-elle $TP\mathbb{C}$?

4. Donner un exemple de matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ non diagonalisable et non inversible qui est $TP\mathbb{R}$.