DS8

Calculatrices interdites

Exercice 1

On note E l'espace vectoriel des applications continues sur le segment $[-1,1]$ et à valeurs réelles.

Q.1 Démontrer que l'on définit un produit scalaire sur E en posant pour f et g éléments de E

$$(f|g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\ dt$$

Q.2 On note $u\ :\ t \mapsto 1$, $v\ :\ t \mapsto t$ et $F = \mathrm{Vect}(u,v)$. Déterminer une base orthonormée de F.

Q.3 Déterminer le projeté orthogonal de la fonction $w\ :\ t \mapsto e^t$ sur le sous-espace F et en déduire la valeur du réel

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_{-1}^{1} \left(e^t - (a+bt)\right)^2\ dt$$

On pourra simplifier les calculs en utilisant le théorème de Pythagore.

Problème

Partie 1

Q.4 Soit x un réel tel que $|x| \leqslant 1/4$. Exprimer en fonction de x les deux solutions y_1 et y_2 de l'équation d'inconnue y :

$$y^2 - y + x = 0$$

Q.5 Donner le domaine de définition de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$.

Q.6 Pour tout réel non nul α, rappeler le développement en série entière de la fonction qui à tout réel X de $]-1,1[$ associe $(1+X)^\alpha$.

Q.7 En déduire que f est développable en série entière au voisinage de 0 et préciser le rayon de convergence de cette série entière notée $\sum S_n z^n$.

Q.8 Préciser S_0 puis montrer en détaillant bien les étapes de vos calculs que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$S_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} \textit{(le coefficient binomial).}$$

Q.9 Rappeler les hypothèses et la formule du produit de Cauchy de deux séries numériques.

Que peut-on dire du rayon de convergence du produit de deux séries entières (le justifier).

Q.10 À l'aide de la question, montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} S_k S_{n-k}.$$

Partie 2

Le but de cette partie est de modéliser et étudier le trajet d'un piéton dans une grande ville dont les rues se croisent à angle droit.

À New-York, dans le quartier de Manhattan, un piéton voit au loin, dans la direction du Nord, le gratte-ciel Empire State Building sous un angle de 45 degrés vers l'Est.

À chaque croisement de rues, le piéton choisit d'aller soit vers le Nord (N), soit vers l'Est (E).

On appelle étape le déplacement du piéton entre deux croisements consécutifs. Soit l un entier naturel non nul. Un trajet de l étapes est représenté par une suite $(u_1, u_2, \dots, u_l)$ avec, pour tout entier i compris entre 1 et l, $u_i = E$ si, au i-ème croisement, le piéton s'est dirigé vers l'Est et $u_i = N$ si, au i-ème croisement, le piéton s'est dirigé vers le Nord.

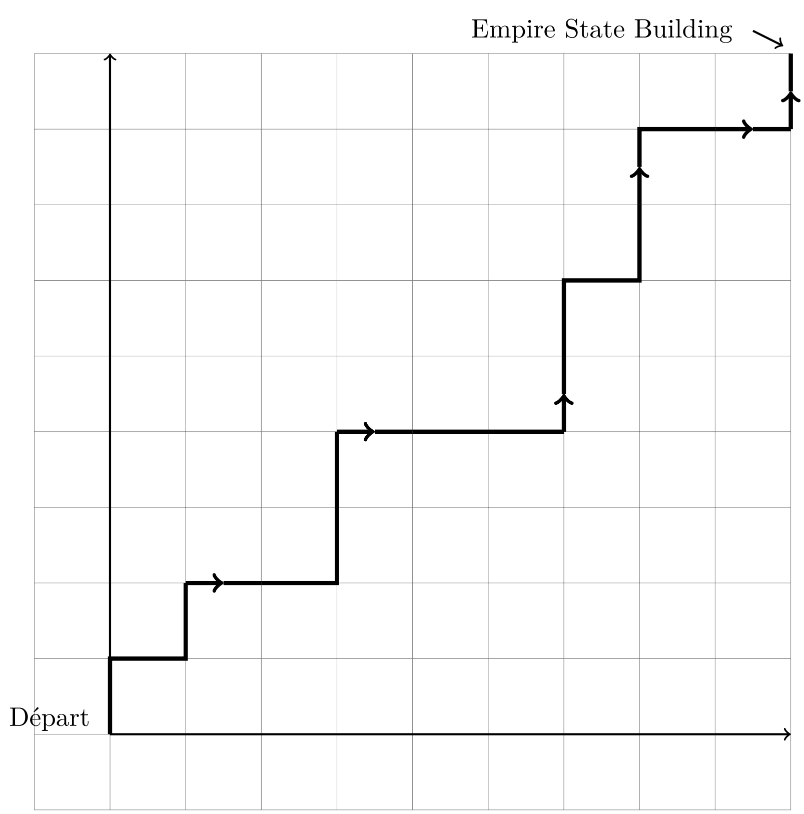
On définit l'origine du repère au point de départ du piéton, chaque croisement du trajet a pour coordonnées (x, y) où x représente le nombre de rues vers l'Est depuis l'origine et y le nombre de rues vers le Nord toujours depuis l'origine, les croisements se situent à égales distances. A chaque trajet de l étapes (l est un entier naturel non nul) on associe le chemin passant par la suite des points de coordonnées (x_k, y_k) pour $0 \leqslant k \leqslant l$ définies par récurrence par :

$x_0 = y_0 = 0$

pour $1 \leqslant k \leqslant l$,

$$(x_k, y_k) = \begin{cases} (x_{k-1}, y_{k-1} + 1) & \text{si} \quad u_k = N \\ (x_{k-1} + 1, y_{k-1}) & \text{si} \quad u_k = E \end{cases}$$

La figure ci-jointe illustre un trajet de 18 étapes du piéton.



Le trajet est (N,E,N,E,E,N,N,E,E,E,N,N,E,N,N,E,E,N)

Q.11 **a.** Écrire en langage Python une fonction `deplacement(L,a,b)` qui renvoie $(a, b+1)$ si `L` est égal à `"N"` et qui renvoie $(a+1, b)$ si `L` est égal à `"E"`.

b. Écrire une fonction `chemin(m)` où `m` est une chaîne constituée des caractères `"N"` et `"E"` et qui renvoie la liste des abscisses ainsi que la liste des ordonnées des points du trajet.

Q.12 En remarquant qu'à chaque étape on a deux choix possibles, déterminer le nombre de trajets comportant exactement l étapes où $l \in \mathbb{N}^*$.

Q.13 **a.** Le nombre de chemins reliant l'origine au point de coordonnées $(3, 2)$ est égal au nombre de trajets de cinq étapes comportant deux étapes N et trois étapes E, en déduire le nombre de trajets reliant l'origine au point de coordonnées $(3, 2)$.

b. Plus généralement, soit un point M de coordonnées (a, b) avec $(a, b) \neq (0, 0)$, déterminer le nombre de chemins reliant l'origine à ce point M.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle U_n l'événement "Le chemin partant de l'origine passe pour la première fois à l'étape $2n$ par un point de la droite Δ d'équation $y = x$".

On note $\mathbb{P}(U_n)$ la probabilité de l'événement U_n.

On pourra noter N_k l'événement "à l'étape k, le déplacement se fait vers le Nord" et E_k l'événement "à l'étape k, le déplacement se fait vers l'Est".

Q.14 Calculer les probabilités des l'événements U_1 et U_2.

Soient quatre entiers naturels a, b, c, d, on note $C_{(a,b)}^{(c,d)}$ l'ensemble des chemins reliant le point de coordonnées (a, b) au point de coordonnées (c, d).

Q.15 Déterminer le cardinal de l'ensemble $C_{(0,1)}^{(n-1,n)}$ des chemins reliant le point de coordonnées $(0, 1)$ au point de coordonnées $(n-1, n)$ pour $n \geqslant 2$. Soit $n \geqslant 2$.

On admet que, pour des raisons de symétrie, le nombre de chemins reliant le point de coordonnées $(0, 1)$ au point de coordonnées $(n-1, n)$ et coupant la droite d'équation $y = x$ est égal au nombre de chemins reliant le point de coordonnées $(1, 0)$ au point de coordonnées $(n-1, n)$.

Q.16 Déterminer le nombre de chemins reliant le point de coordonnées $(0, 1)$ au point de coordonnées $(n-1, n)$ et coupant la droite d'équation $y = x$.

Soient quatre entiers naturels a, b, c, d, on note $T_{(a,b)}^{(c,d)}$ l'ensemble des chemins reliant le point de coordonnées (a, b) au point de coordonnées (c, d) ne coupant pas la droite d'équation $y = x$.

Q.17 En déduire le cardinal de l'ensemble $T_{(0,1)}^{(n-1,n)}$ des chemins reliant le point de coordonnées $(0, 1)$ au point de coordonnées $(n-1, n)$ ne coupant pas la droite d'équation $y = x$.

Q.18 Déterminer de même le cardinal de l'ensemble $T_{(1,0)}^{(n,n-1)}$ des chemins reliant le point de coordonnées $(1, 0)$ au point de coordonnées $(n, n-1)$ ne coupant pas la droite d'équation $y = x$.

Q.19 En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$:

$$\mathbb{P}(U_n) = \frac{1}{2^{2n-1}} \times \frac{(2n-2)!}{n!\ (n-1)!}$$

puis exprimer $\mathbb{P}(U_n)$ en fonction de S_n défini dans la partie 1.

Partie 3 :

On considère la suite (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \mathbb{P}(U_n)$.

Q.20 Déterminer le réel a tel que :

$$\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Q.21 En appliquant la comparaison série-intégrale, montrer qu'il existe une constante γ réelle telle que :

$$\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} \underset{N\to+\infty}{=} \ln(N) + \gamma + o(1).$$

Q.22 En calculant de deux manières différentes la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{N-1} \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$, montrer qu'il existe une constante $k > 0$ telle que :

$$v_N \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{k}{N^{\frac{3}{2}}}$$

Q.23 Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2, v_{n+1} = (2n-1)v_n - (2n+1)v_{n+1}$$

En déduire la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(U_n)$.

Q.24 Comment interpréter ce résultat ?