Problème : séries trigonométriques

Partie 1 : exemples

1. On a
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \left|\frac{1}{2^n}\cos(nx) + \frac{1}{3^n}\sin(nx)\right| \leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}$$
Le majorant est indépendant de x et est le terme général d'une série convergente. La série de fonctions est donc normalement convergente sur $\mathbb{R}$.
Pour le calcul, on remarque que pour $p \geq 2$, e^{ix}/p est de module < 1 et que donc (somme géométrique)
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e^{ix}}{p}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{e^{ix}}{p}} = \frac{p}{p-e^{ix}}$$
En passant aux parties réelle et imaginaire, on a donc
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{p^n} = \frac{p^2 - p\cos(x)}{p^2-2p\cos(x)+1} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{p^n} = \frac{p\sin(x)}{p^2-2p\cos(x)+1}$$
Il reste à combiner les résultats pour $p = 2$ et $p = 3$:
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n}\cos(nx) + \frac{1}{3^n}\sin(nx)\right) = \frac{4-2\cos(x)}{5-4\cos(x)} + \frac{3\sin(x)}{10-6\cos(x)}$$

2. En utilisant le DSE de l'exponentielle, on a
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(e^{ix}) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{inx}}{n!}$$
Or, $\exp(e^{ix}) = \exp(\cos(x))\exp(i\sin(x))$ et la partie réelle de cette quantité est
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(\cos(x))\cos(\sin(x)) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n!}$$

3. Posons $a_n = \frac{1}{n+1}$ et $u_n(x) = a_n\cos(nx)$. (a_n) est de limite nulle mais $u_n(0) = \frac{1}{n+1}$ est le terme général d'une série divergente. $\sum(u_n)$ n'est donc pas simplement convergente sur $\mathbb{R}$.

4. La norme infinie sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ est immédiatement égale à $\frac{1}{\sqrt{n}}$ qui est le terme général d'une série divergente. La série de fonction proposée n'est donc pas normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

Partie 2 : propriétés

Une condition suffisante

5. On a
$$\forall x \in \mathbb{R},\ |a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)| \leq |a_n| + |b_n|$$
Le majorant est indépendant de x et est le terme général d'une série convergente. La série de fonctions est donc normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

Une condition nécessaire

6. On a $((.|.)$ étant le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^2)$
$$\forall x \in \mathbb{R},\ |a\cos(x) + b\sin(x)| = |((a,b)|(\cos(x),\sin(x)))| \leq \|(a,b)\| \cdot \|(\cos(x),\sin(x))\| = \sqrt{a^2+b^2}$$
De plus, il y a un cas d'égalité :

- c'est immédiat si $a=b=0$ (n'importe quel x convient) ;
- si $(a,b)\neq(0,0)$, $(a/\sqrt{a^2+b^2}, b/\sqrt{a^2+b^2})$ est un vecteur normé et il existe donc un x tel que ce vecteur soit $(\cos(x),\sin(x))$.

7. Posons $u_n(x)=a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)$. On suppose ici que $\sum(\|u_n\|_\infty)$ converge. On a (avec la question précédente et car nx varie dans $\mathbb{R}$ quand c'est le cas pour x si $n>0$)

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \|u_n\|_\infty=\sqrt{a_n^2+b^2}\geq\left\{\begin{array}{l}|a_n|\\|b_n|\end{array}\right.$$

Par comparaison des séries positives, $\sum(a_n)$ et $\sum(b_n)$ convergent absolument.

Autres propriétés

8. La convergence normale sur $\mathbb{R}$ entraîne la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ et cette dernière conserve la continuité. Les fonctions de la séries étant continues sur $\mathbb{R}$, il en est de même de f.
La convergence normale sur $\mathbb{R}$ entraîne la convergence simple sur $\mathbb{R}$. La convergence simple conserva la 2π-périodicité (si $S_n(x+2\pi)=S_n(x)$, on peut passer à la limite pour obtenir la 2π-périodicité de la limite). Ici, f est donc 2π-périodique et

$$f\in C_{2\pi}$$

9. On effectue une linéarisation : $\cos^2(nx)=\frac{1}{2}(\cos(2nx)+1)$. On a donc

$$\forall n\geq 1,\ \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nx)\ dx=\left[\frac{1}{4n}\sin(2nx)+\frac{x}{2}\right]_{-\pi}^{\pi}=\pi$$

De même, $\sin(kx)\cos(nx)=\frac{1}{2}(\sin(kx+nx)+\sin(kx-nx))$. $\sin(px)$ est d'intégrale nulle sur $[-\pi,\pi]$ (évident si $p=0$, par primitivation en $-\frac{\cos(px)}{p}$ sinon). On en déduit que

$$\forall n,k,\ \int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\cos(nx)\ dx=0$$

10. Soit $n\in\mathbb{N}$. On a

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)\ dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(a_k\cos(kx)\cos(nx)+b_k\sin(kx)\cos(nx))\ dx$$

Posons encore $u_k(x)=a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)$. On a $\forall x,\ |u_k(x)\cos(nx)|\leq|u_k(x)|\leq\|u_k\|_\infty$. Le majorant est indépendant de x et est le terme général d'une série convergente (par l'hypothèse de normale convergence). On a donc sous l'intégrale une série de fonctions normalement convergente sur le SEGMENT $[-\pi,\pi]$ et on est dans le cas simple où on peut intervertir :

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)\ dx=\sum_{k=0}^{\infty}\left(a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\cos(nx)\ dx+b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\cos(nx))\ dx\right)$$

Dans la somme, tous les termes sont nuls sauf celui d'indice $k=n$ qui vaut $a_n\pi$ si $n\neq 0$ (question précédente et résultat admis) et $2\pi a_0$ si $n=0$. Ainsi,

$$\forall n\neq 0,\ a_n=\alpha_n(f)\ \text{ et }\ a_0=\frac{1}{2}\alpha_0(f)$$

11. Il s'agit d'utiliser la question précédente avec $a_0=\alpha_0(f)/2$, $b_0=0$ et pour $n\geq 1$, $a_n=\alpha_n(f)$ et $b_n=\beta_n(f)$. La somme est ici égale à g et on obtient donc

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \alpha_n(f)=\alpha_n(g)\ \text{ et }\ \beta_n(f)=\beta_n(g)$$

12. $h \mapsto \alpha_n(h)$ et $h \mapsto \beta_n(h)$ étant linéaire, on a ici $\alpha_n(g-f) = \beta_n(g-f) = 0$ et, avec le résultat admis $g - f = 0$.

13. Si f est paire, $x \mapsto f(x)\sin(nx)$ est impaire et sa fonction est donc d'intégrale nulle sur un intervalle centré sur 0 (ce que l'on voit par le changement de variable affine $t = -x$). En particulier,

$$\forall n,\ \beta_n(f) = 0$$

$x \mapsto f(x)\cos(nx)$ est paire et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)\ dx$$

14. Utilisons un petit script Python. Pour calculer $f(x)$, on cherche un entier k tel que $x - 2k\pi = y \in [-\pi, \pi]$ et on renvoie y^2.

```
from numpy import *
from matplotlib import pyplot as plt

def f(x):
    k=floor((x+pi)/(2*pi))
    return (x-2*k*pi)**2

a,b=-3*pi,3*pi
pas=(b-a)/1000
lx=[a+k*pas for k in range(1000)]
ly=[f(x) for x in lx]
plt.plot(lx,ly,'k')
plt.axis('scaled')
plt.show()
```

La fonction f étant paire, les coeffcients $\beta_n(f)$ sont tous nuls. De plus

$$\alpha_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos(nx)\ dx$$

Une double intégration par parties donne, pour $n \neq 0$,

$$\int_0^\pi x^2\cos(nx)\ dx = -\frac{2}{n}\int_0^\pi x\sin(nx)\ dx = -\frac{2}{n}\left(\left[-\frac{x\cos(nx)}{n}\right]_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos(nx)\ dx\right)$$

et ainsi

$$\forall n \neq 0,\ \alpha_n(f) = \frac{4(-1)^n}{n^2}$$

On a aussi

$$\alpha_0(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\ dx = \frac{2}{3}\pi^2$$

Comme $\sum(\alpha_n(f))$ et $\sum(\beta_n(f))$ convergent absolument, on peut utiliser ce qui précède et conclure

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$$

la série étant normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

15. Pour $x = 0$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

Pour $x = \pi$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

On découpe la somme en isolant les termes d'indice pair et ceux d'indice impair (c'est licite car la série est absolument convergente) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

On en déduit que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

16. $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$ est continue sur $]0,1]$. En 0, la fonction est équivalente à $\frac{x}{x} = 1$ et est donc prolongeable par continuité. Notre fonction est donc intégrable sur $[0,1]$ (ce n'est même pas une intégrale généralisée).

Utilisons le DSE de $x \mapsto \ln(1+x)$:

$$\forall x \in]0,1[, \quad \frac{\ln(1+x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{n}$$

On en déduit que

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\, dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{n}\, dx$$

On veut intervertir somme et intégrale. Je choisis le théorème d'intégration terme à terme.

- $g_n \ : \ x \mapsto (-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n}$ est le terme général d'une série de fonctions continue qui converge simplement sur $]0,1[$ vers $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$.
- La somme simple est continue sur $]0,1[$.
- g_n est intégrable sur $]0,1[$ et $\int_0^1 |g_n(x)|\, dx = \frac{1}{n^2}$ est le terme générale d'une série convergente.

L'interversion est licite et donne

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{n}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

17. Dans l'exemple de la question 18, on a obtenu une série normalement convergente sur $\mathbb{R}$. Cependant la somme f n'est pas dérivable. En effet, f est dérivable à droite et gauche en π avec des nombres dérivés 2π (à gauche) et -2π (à droite).

Supposons que $\sum(na_n)$ et $\sum(nb_n)$ sont des séries absolument convergente. Montrons qu'alors en posant $u_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$, $\sum(u_n)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On utilise pour cela le théorème de régularité des sommes de séries fonctions.

- $\forall n,\ u_n \in C^1(\mathbb{R})$ et $u_n'(x) = -na_n \sin(nx) + nb_n \cos(nx)$.
- $\sum(u_n)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
- $\|u_n'\|_\infty \leq |na_n| + |nb_n|$ est le terme général d'une série convergente et $\sum(u_n')$ est donc normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

Le théorème s'applique donc et indique non seulement que la somme est de classe C^1 mais que sa dérivée est la somme de la série dérivée.

18. On a vu en question 5 que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{3^n} = \frac{3\sin(x)}{10-6\cos(x)}$$

On est dans le cadre de la condition précédente avec $a_n = 0$ et $b_n = 1/3^n$. On en déduit (en dérivant) que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\cos(nx)}{3^n} = \frac{3}{2}\frac{5\cos(x)-3}{(5-3\cos(x))^2}$$

I.A - Étude d'une intégrale à paramètre

I.A.1) On considère la fonction $\varphi\ :\ \left\{\begin{array}{ccc} [0,+\infty[\times]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & \dfrac{1-\cos t}{t^2}\mathrm{e}^{-xt} \end{array}\right.$

i Soit $t \in]0,+\infty[$. La fonction $x \mapsto \varphi(x,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$.

ii Soit $x \in [0,+\infty[$. La fonction $t \mapsto \varphi(x,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$.

iii Soit $x \in [0,+\infty[$. On considère la fonction $g : t \mapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ qui est définie, positive et continue sur $]0,+\infty[$

De sorte que :

$$\forall t \in [0,+\infty[, \forall x \in [0,+\infty[, |\varphi(x,t)| \leqslant g(t)$$

Quand $t \to 0$, $g(t) = \dfrac{1-1+t^2/2+\mathrm{o}(t^2)}{t^2}$ donc $g(t) \to 1/2$

Ainsi g est prolongeable par continuité en 0, donc g est intégrable sur $]0,1]$

Pour $t \geqslant 1$, $|g(t)| \leqslant 2/t^2$, or $t \mapsto 2/t^2$ est intégrable sur $[1,+\infty[$

donc par comparaison à une fonction positive g est intégrable sur $[1,+\infty[$

Ainsi g est intégrable sur $]0,+\infty[$ et on a l'hypothèse de domination :

Avec i, ii et iii, $\boxed{f : x \mapsto \int_0^{\infty} \varphi(x,t)\mathrm{d}t \text{ est définie et continue sur } [0,+\infty[}$

Montrons maintenant la classe $\mathcal{C}^2$ de f avec le théorème de Leibniz :

i Soit $t \in]0,+\infty[$. La fonction $x \mapsto \varphi(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$

de dérivées successives : $x \mapsto \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t) = \dfrac{\cos t - 1}{t}\mathrm{e}^{-xt}$ et $x \mapsto \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,t) = (1-\cos t)\mathrm{e}^{-xt}$

ii Soit $x \in [0,+\infty[$.

La fonction $t \mapsto \varphi(x,t)$ est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$ d'après la domination précédente.

Les fonctions $t \mapsto \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)$ et $t \mapsto \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,t)$ sont continues sur $]0,+\infty[$.

De façon analogue à ci-dessus : on a $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t) = 0$ ce qui donne l'intégrabilité de $t \mapsto \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)$ sur $]0,1]$

De plus par croissance comparée $\lim\limits_{t\to\infty} t^2\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t) = 0$ donc $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t) = \underset{t\to\infty}{\mathrm{o}}(1/t^2)$

donc par comparaison à une fonction positive $t \mapsto \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur $[1,+\infty[$

ainsi $t \mapsto \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$

iii Soit $a < b$ dans $]0,+\infty[$ et on pose $G : t \mapsto \mathrm{e}^{-at}$

La fonction G est continue sur $[0,+\infty[$ et $G(t) = \underset{t\to\infty}{\mathrm{o}}(1/t^2)$

donc G est intégrable sur sur $[0,+\infty[$ et on a l'hypothèse de domination :

$$\forall x \in [a,b],\ \forall t \geqslant 0,\ \left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant G(t)$$

Avec i, ii et iii, $\boxed{f : x \mapsto \int_0^\infty \varphi(x,t)\mathrm{d}t \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } [0,+\infty[}$

et on a $f' : x \mapsto \displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos t - 1}{t}\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t$ et $f'' : x \mapsto \displaystyle\int_0^\infty (1-\cos t)\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t$

I.A.2) Pour $x \geqslant 1$, je considère les fonctions $\psi_x : t \mapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}\mathrm{e}^{-xt}$ et g de la question précédente.

i Pour $x \geqslant 1$, ψ_x est continue sur $]0,+\infty[$

ii Pour $t > 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} \psi_x(t) = 0$
donc la famille $(\psi_x)_{x\geqslant 1}$ converge simplement quand $x \to +\infty$ vers la fonction $t \mapsto 0$ sur $]0,+\infty[$.

iii La fonction $t \mapsto 0$ est continue sur $]0,+\infty[$

iv et on a l'hypothèse de domination avec la fonction g de la question précédente intégrable sur $]0,+\infty[$:

$$\forall x \geqslant 1, \forall t \in]0,+\infty[,\ |\psi_x(t)| \leqslant g(t)$$

<u>Conclusion</u> : Avec i, ii, iii et iv, on peut appliquer l'extension du théorème de convergence dominée qui donne l'intégrabilité de $t \mapsto 0$ sur $]0,+\infty[$ et $\lim\limits_{x\to\infty} \displaystyle\int_0^\infty \psi_x = \int_0^\infty 0$

Pour la limite de f' en $+\infty$, on utilise également l'extension du théorème de convergence dominée avec la fonction de domination $t \mapsto \dfrac{-\cos t + 1}{t}\mathrm{e}^{-t}$ pour $x \geqslant 1$

On trouve ainsi $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \text{ et } \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0}$

I.A.3) Soit $x > 0$. On a $f''(x) = \displaystyle\int_0^\infty (1-\cos t)\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathfrak{Re}\left((1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{e}^{-xt}\right)\mathrm{d}t$

or $t \mapsto (1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{e}^{-xt}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ car continue et $\forall t \in]0,+\infty[$, $\left|(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{e}^{-xt}\right| \leqslant \mathrm{e}^{-xt}$

donc $f''(x) = \mathfrak{Re}\left(\displaystyle\int_0^\infty (\mathrm{e}^{-xt} - \mathrm{e}^{(\mathrm{i}-x)t})\mathrm{d}t\right)$

or $\displaystyle\int_0^\infty (\mathrm{e}^{-xt} - \mathrm{e}^{(\mathrm{i}-x)t})\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{(\mathrm{i}-x)t}}{x-\mathrm{i}} - \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{x}\right]_{t=0}^{t\to\infty} = \frac{-1}{x-\mathrm{i}} + \frac{1}{x} = -\frac{x+\mathrm{i}}{x^2+1} + \frac{1}{x}$

donc $\boxed{f'' : x \mapsto -\dfrac{x}{x^2+1} + \dfrac{1}{x} \text{ sur l'intervalle }]0,+\infty[}$

Donc on peut trouver $K \in \mathbb{R}$ tel que $f' : x \mapsto \ln(x) - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1) + K$

De plus quand $x \to +\infty$, on a $\ln(x) - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)$

et $\dfrac{x^2}{x^2+1} \sim \dfrac{x^2}{x^2} = 1$ donc $\dfrac{x^2}{x^2+1} \to 1$ par composition $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right) \to 0$

donc $f'(x) \to K$ donc $K = 0$ d'après la question précédente

On en déduit que $\boxed{\forall x > 0,\ f'(x) = \ln(x) - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)}$

I.A.4) On note $g : x \mapsto x\ln(x) - \frac{1}{2}x\ln(x^2+1) - \arctan(x) + \frac{\pi}{2}$
g est de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $x > 0$
On a $g'(x) = \ln(x) + 1 - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \frac{x^2}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} = f'(x)$
donc on $g - f$ est constante sur $]0,+\infty[$.
quand $x \to +\infty$, $x\ln(x) - \frac{1}{2}x\ln(x^2+1) = \dfrac{x}{2}\ln\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right) = \dfrac{-x}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \sim \dfrac{-x}{2}\dfrac{1}{x^2}$
donc $x\ln(x) - \frac{1}{2}x\ln(x^2+1) \to 0$ et $-\arctan(x) + \frac{\pi}{2} \to 0$

ainsi $g(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$ or $f(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)-f(x)) = 0$ ainsi $\forall x>0,\ f(x)=g(x)$

de plus quand $x\to 0^+$, $x\ln(x)\to 0$ et $-\frac{1}{2}x\ln(x^2+1)-\arctan(x)+\frac{\pi}{2}\to\frac{\pi}{2}$

donc $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \dfrac{\pi}{2}$ or f et g coïncident sur $]0,+\infty[$

donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{\pi}{2}$ or f est continue sur $[0,+\infty[$

Ainsi $\boxed{\begin{cases} \forall x>0, f(x) = x\ln(x) - \frac{1}{2}x\ln(x^2+1) - \arctan(x) + \frac{\pi}{2} \\ f(0) = \frac{\pi}{2} \end{cases}}$

I.A.5) On a $\dfrac{\pi}{2} = f(0) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos u}{u^2}\mathrm{d}u$

Soit $s>0$. La fonction $t\mapsto st$ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante et bijective de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$
On effectue alors le changement de variable $u=st$; $\mathrm{d}u = s\mathrm{d}t$ (qui donne l'existence de la nouvelle intégrale)

donc $\dfrac{\pi}{2} = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos(st)}{(st)^2}s\mathrm{d}t = \frac{1}{s}\int_0^\infty \frac{1-\cos(st)}{t^2}\mathrm{d}t$

donc $s = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos(st)}{t^2}\mathrm{d}t$ et $s=|s|$

pour $s=0$, c'est évident donc $\forall s\in\mathbb{R}^+,\ |s| = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos(st)}{t^2}\mathrm{d}t$

or les fonctions $s\mapsto |s|$ et $s\mapsto \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos(st)}{t^2}\mathrm{d}t$ sont paires

ce qui donne $\boxed{\forall s\in\mathbb{R},\ |s| = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos(st)}{t^2}\mathrm{d}t}$

I.B - Étude d'une suite d'intégrales

I.B.1) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On considère la fonction $g_n : t\mapsto \frac{1-(\cos t)^n}{t^2}$ qui est continue sur $]0,+\infty[$
De plus $\forall t\in[1,+\infty[$, $|g_n(t)|\leqslant\frac{1}{t^2}$ et quand $t\to 0$, $g_n(t) = \frac{1-(1+\mathrm{O}(t^2))^n}{t^2} = \mathrm{O}(1)$
comme en **I.A.1)**, on conclut à l'intégrabilité de g_n sur $]0,+\infty[$
d'où l'existence de u_n

et $u_{2n+2}-u_{2n} = \displaystyle\int_0^\infty \frac{(\cos t)^{2n}-(\cos t)^{2n+2}}{t^2}\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{(\cos t)^{2n}(\sin t)^2}{t^2}\mathrm{d}t \geqslant 0$

d'où $\boxed{\text{l'existence de la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ et la croissance de la sous-suite } (u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}.}$

I.B.2) On a $u_1 = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos t}{t^2}\mathrm{d}t = f(0) = \frac{\pi}{2}$

et $u_2 = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos^2 t}{t^2}\mathrm{d}t$ or $\cos^2 t = \dfrac{1+\cos(2t)}{2}$

donc $u_2 = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos^2 t}{t^2}\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{1-\cos(2t)}{2t^2}\mathrm{d}t$

en utilisant **I.A.5**, on a donc $\dfrac{4}{\pi}u_2 = |2|$

On a montré que $\boxed{u_1 = u_2 = \frac{\pi}{2}}$

I.C - Calcul d'un équivalent de u_n

I.C.1) Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

La fonction $u \mapsto \sqrt{2u/n}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante et bijective de $]0,+\infty[$ vers $]0,+\infty[$

On effectue le changement de variable $t = \sqrt{2u/n}$; $\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{n}\mathrm{d}u}{\sqrt{2u}}$

donc $u_n = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1-(\cos t)^n}{t^2}\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{1-\left(\cos(\sqrt{2u/n})\right)^n}{2u/n}\frac{\sqrt{n}\mathrm{d}u}{\sqrt{2u}}$

On a montré que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}}v_n \ \text{ avec } \ v_n = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\left(\cos(\sqrt{2u/n})\right)^n}{u\sqrt{u}}\mathrm{d}u}$

I.C.2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction $\varphi : u \mapsto \left(\cos(\sqrt{2u/n})\right)^n$

Soit $u \in]0,1]$. On a $\varphi'(u) = \dfrac{-n}{2}\sqrt{\dfrac{2}{nu}}\sin(\sqrt{2u/n})\left(\cos(\sqrt{2u/n})\right)^{n-1}$

donc $|\varphi'(u)| = \left|\dfrac{\sin(\sqrt{2u/n})}{\sqrt{2u/n}}\right| \left|\cos(\sqrt{2u/n})\right|^{n-1} \leqslant \left|\dfrac{\sin(\theta)}{\theta}\right|$ où $\theta = \sqrt{2u/n}$

Par inégalité de convexité, on a $\left|\frac{\sin(\theta)}{\theta}\right| \leqslant 1$ donc a $|\varphi'(u)| \leqslant 1$

donc par inégalité des accroissements finis appliquée à φ est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1]$

on a $|\varphi(0)-\varphi(u)| \leqslant 1 \times |u-0|$

On a montré que $\boxed{\forall (n,u) \in \mathbb{N}^* \times]0,1],\ \left|1-\left(\cos(\sqrt{2u/n})\right)^n\right| \leqslant u}$

I.C.3) On note la fonction $\psi_n : u \mapsto \dfrac{1-\left(\cos(\sqrt{2u/n})\right)^n}{u\sqrt{u}}$

$(*)$ Les fonctions ψ_n sont continues sur $]0,+\infty[$

$(**)$ Soit $u > 0$. Quand $n \to \infty$, on a $\cos(\sqrt{2u/n}) = 1 - \frac{u}{n} + \mathrm{o}(u/n)$

donc $\left(\cos(\sqrt{2u/n})\right)^n = \exp\left(n\ln(\cos(\sqrt{2u/n}))\right) = \exp\left(n\ln(1-\frac{u}{n}+\mathrm{o}(u/n))\right)$

or $\ln(1-\frac{u}{n}+\mathrm{o}(u/n)) \sim -\frac{u}{n}$ donc $n\ln(1-\frac{u}{n}+\mathrm{o}(u/n)) \to -u$

donc par composition $\exp\left(n\ln(1-\frac{u}{n}+\mathrm{o}(u/n))\right) \to \mathrm{e}^{-u}$ ainsi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\psi_n(u) = \frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u\sqrt{u}}$

donc la suite de fonctions (ψ_n) converge simplement vers la fonction $u \mapsto \frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u\sqrt{u}}$ sur $]0,+\infty[$

$(***)$ la fonction $u \mapsto \frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u\sqrt{u}}$ est continue sur $]0,+\infty[$

$(****)$ On considère la fonction $h : u \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{u}} & \text{si } u \in]0,1] \\ \frac{2}{u\sqrt{u}} & \text{sinon} \end{cases}$

On montre facilement que h est continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$ et on a l'hypothèse domination

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[,\ |\psi_n(x)| \leqslant h(x)$$

(sur $]0,1]$ on utilise **I.C.2**)

Avec $(*), (**), (***)$ et $(****)$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée qui donne :

l'intégrabilité de $u \mapsto \frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u\sqrt{u}}$ sur $]0,+\infty[$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^\infty \psi_n = \int_0^\infty \frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u\sqrt{u}}\mathrm{d}u$

Ainsi $\boxed{\text{la suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ admet une limite finie } l \text{ vérifiant } l = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u\sqrt{u}}\mathrm{d}u}$

I.C.4) Sous réserve d'existence, on effectue dans l une intégration par parties avec les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

$$u \mapsto 1-\mathrm{e}^{-u} \text{ et } u \mapsto -2u^{-1/2} :$$

On a $l = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u\sqrt{u}}\mathrm{d}u = \left[-2u^{-1/2}(1-\mathrm{e}^{-u})\right]_{u\to0}^{u\to\infty} - \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u}(-2u^{-1/2})\mathrm{d}u$

On a par produit $\lim\limits_{u\to\infty}(-2u^{-1/2}(1-\mathrm{e}^{-u}))=0$
et quand $u\to 0$, on a $1-\mathrm{e}^{-u}\sim u$ donc $-2u^{-1/2}(1-\mathrm{e}^{-u})\sim -2\sqrt{u}\to 0$
donc le bloc entre crochets vaut 0 ce qui valide l'intégration par parties
donc $l=2\int\limits_0^\infty \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u=2\sqrt{\pi}$ selon la relation admise
donc $l\neq 0$ ainsi d'après la question précédente et **I.C.1**, on a $u_n\sim\dfrac{v_n\sqrt{n}}{2\sqrt{2}}\sim\dfrac{l\sqrt{n}}{2\sqrt{2}}$
On conclut que $\boxed{u_n\sim\sqrt{\dfrac{n\pi}{2}}}$