EXERCICE 2 analyse

On pose $f(x) = \dfrac{2x+7}{(x+1)^2}$.

1. Décomposer $f(x)$ en éléments simples.

2. En déduire que f est développable en série entière en 0 sur un intervalle du type $]-r, r[$ (où $r > 0$). Préciser ce développement en série entière et déterminer, en le justifiant, le domaine de validité D de ce développement en série entière.

EXERCICE 5 analyse

1. On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n\,(\ln n)^\alpha}$ où $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

a. Cas $\alpha \leqslant 0$

En utilisant une minoration très simple de u_n, démontrer que la série diverge.

b. Citer le théorème de comparaison séries-intégrales.

c. Cas $\alpha > 0$

Étudier la nature de la série.
Indication : On pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^\alpha}$.

2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3} \frac{\left(\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln(n^2+n)\right)^2}$.

EXERCICE 6 analyse

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et l un réel positif strictement inférieur à 1.

1. Démontrer que si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, alors la série $\sum u_n$ converge.

Indication : écrire, judicieusement, la définition de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.

2. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{n^n}$?

3. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.

4. Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes :

a. $\displaystyle\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^{3n+1}$.

b. $\displaystyle\sum n^{(-2)^n} z^n$

c. $\displaystyle\sum \frac{n!}{n^n} z^n$

EXERCICE 9 analyse

1. Soit X un ensemble, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ et f une fonction de X dans $\mathbb{C}$. Donner la définition de la convergence uniforme sur X de la suite de fonctions (f_n) vers la fonction f.
2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f. On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0.

   Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur X.
3. On pose $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1}\mathrm{e}^{-nx^2}\cos(\sqrt{n}x)$.
   - **a.** Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   - **b.** La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[0,+\infty[$?
   - **c.** Soit $a > 0$. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[a,+\infty[$?
   - **d.** La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $]0,+\infty[$?

EXERCICE 18 analyse

On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$.

On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$.

1. Étudier la convergence simple de cette série.

   On note D l'ensemble des x où cette série converge et $S(x)$ la somme de cette série pour $x \in D$.
2.
   - **a.** Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur D.
   - **b.** La fonction S est-elle continue sur D ?

EXERCICE 26 analyse

Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\mathrm{d}t$.

1. Justifier que I_n est bien définie.
2. Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et déterminer sa limite.
3. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1}(-1)^n I_n$ est-elle convergente ?

EXERCICE 29 analyse

On pose : $\forall\, x \in]0,+\infty[$ et $\forall\, t \in]0,+\infty[$, $f(x,t) = \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$.

1. Démontrer que, pour tout $x \in]0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

   On pose alors, $\forall\, x \in]0,+\infty[$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$.
2. Pour tout $x \in]0,+\infty[$, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.
3. Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.
4. Démontrer que Γ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

Partie 1 : Formule de Cauchy et théorème de Liouville

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On note f sa somme.

1. Soit r réel tel que $0 < r < R$. Montrer rigoureusement que :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta = a_n r^n \text{ (formule de Cauchy.)}$$

2. Démontrer le théorème de Liouville : si $R = +\infty$ et si f est bornée, alors f est constante.

3. En déduire que si $R = +\infty$ et s'il existe un polynôme P tel que $\forall z \in \mathbb{C}, |f(z)| \leqslant |P(z)|$, alors f est un polynôme de degré inférieur ou égal au degré de P.

Partie 2 : Inverse d'une série entière

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ telle que $a_0 = 1$. Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ pour $|z| < R$.
Soit r réel tel que $0 < r < R$.

1. Quelle est la définition du rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$?

2. Montrer qu'il existe $K > 0$ tel que pour tout entier n, $|a_n| \leqslant \left(\dfrac{K}{r}\right)^n$

Soit $b_0 = 1$ et pour tout $n \geqslant 1, b_n = -\sum_{k=1}^n a_k b_{n-k}$.

3. Montrer que pour tout entier n, $|b_n| \leqslant \left(\dfrac{2K}{r}\right)^n$.

4. En déduire que la série entière $\sum b_n z^n$ a un rayon de convergence strictement positif R'.

5. Soit $R'' = \min(R, R')$. On pose $g(z) = \sum b_n z^n$ pour $|z| < R''$.
Calculer $f(z)g(z)$ pour $|z| < R''$.

Partie 3 : Théorème de d'Alembert-Gauss.

Soit P un polynôme n'admettant aucune racine complexe.

1. Montrer que la fonction $\phi : z \mapsto \dfrac{1}{P(z)}$ est bornée.

2. Montrer que ϕ est développable en série entière au voisinage de 0.

3. Étudier plus précisément le rayon de convergence de ϕ et conclure...

Partie 4 : une autre preuve...

Soit P un polynôme non constant. Supposons par l'absurde que P n'admet aucune racine complexe.
Posons pour $(r, t) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi]$,

$$\phi(r,t) = \frac{1}{P(re^{it})} \text{ et } f(r) = \int_0^{2\pi} \phi(r,t)dt.$$

1. Calculer $\dfrac{\partial \phi}{\partial r}$ et $\dfrac{\partial \phi}{\partial t}$ et établir que $\dfrac{\partial \phi}{\partial t} = ir\dfrac{\partial \phi}{\partial r}$.

2. Démontrer que f est de classe C^1 et montrer que $f' = 0$.

3. Évaluer la limite de f en $+\infty$ et conclure en calculant $f(0)$.