

Partie I - Un exemple de chaîne de Markov

Q1. $(\mathcal{A}_0, \mathcal{B}_0)$ forme un système complet d'événements de probabilités non nulles

La formule des probabilités totales nous donne :

$$P(\mathcal{A}_1) = P_{\mathcal{A}_0}(\mathcal{A}_1)P(\mathcal{A}_0) + P_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{A}_1)P(\mathcal{B}_0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}$$

$$\text{de même : } P(\mathcal{B}_1) = P_{\mathcal{A}_0}(\mathcal{B}_1)P(\mathcal{A}_0) + P_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}_1)P(\mathcal{B}_0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2}$$

$$\boxed{P(\mathcal{A}_1) = \frac{3}{8} \text{ et } P(\mathcal{B}_1) = \frac{5}{8}}$$

Q2. Soit $n \in \mathbb{N}$. De même qu'à la question précédente, avec la formule des probabilités totales utilisée avec le système complet d'événements $(\mathcal{A}_n, \mathcal{B}_n)$ on a :

$$P(\mathcal{A}_{n+1}) = P_{\mathcal{A}_n}(\mathcal{A}_{n+1})P(\mathcal{A}_n) + P_{\mathcal{B}_n}(\mathcal{A}_{n+1})P(\mathcal{B}_n) = \frac{1}{2}P(\mathcal{A}_n) + \frac{1}{4}P(\mathcal{B}_n)$$

$$\text{De même, } P(\mathcal{B}_{n+1}) = P_{\mathcal{A}_n}(\mathcal{B}_{n+1})P(\mathcal{A}_n) + P_{\mathcal{B}_n}(\mathcal{B}_{n+1})P(\mathcal{B}_n) = \frac{1}{2}P(\mathcal{A}_n) + \frac{3}{4}P(\mathcal{B}_n)$$

ce qui s'écrit matriciellement :

$$\boxed{\mu_{n+1} = \mu_n A \text{ avec } A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}}$$

Q3. À l'aide de la calculatrice, $\boxed{P(\mathcal{A}_5) \approx 0,33 \text{ et } P(\mathcal{B}_5) \approx 0,67}$

Q4. Soit $k \in \mathbb{N}$.

Si $k = 0$, alors $P(\mathcal{T}_0) = P(\mathcal{A}_0) = \frac{1}{2}$

si $k > 0$, alors $\mathcal{T}_k = \mathcal{A}_k \cap \bigcap_{i=0}^{k-1} \mathcal{B}_i$

En utilisant la formule des probabilités composées, on obtient :

$$P(\mathcal{T}_k) = P_{\bigcap_{i=0}^{k-1} \mathcal{B}_i}(\mathcal{A}_k) \times \prod_{i=0}^{k-1} P_{\bigcap_{j=0}^{i-1} \mathcal{B}_j}(\mathcal{B}_i)$$

On utilise l'énoncé :

« la particule au temps $n + 1$ dépend uniquement de son état au temps n »

On trouve alors $P(\mathcal{T}_k) = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \frac{1}{4}$

Q5. L'événement recherché \mathcal{C} : " la particule reste indéfiniment à l'état \mathcal{B} " s'écrit $\bigcap_{n=0}^{+\infty} \mathcal{B}_n$. C'est la limite de la suite décroissante des événements $(\mathcal{C}_N)_{N \geq 0}$ où $\mathcal{C}_N = \bigcap_{n=0}^N \mathcal{B}_n$. D'après le théorème de la limite monotone décroissante, $P(\mathcal{C}) = \lim_{N \rightarrow +\infty} P(\mathcal{C}_N) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{3^N}{4^N} = 0$.

Ainsi, $P(\mathcal{C}) = 0$.

On peut aussi vérifier que $P(\mathcal{C}) = P(\Omega \setminus \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{T}_n) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} P(\mathcal{T}_n) = 1 - 1 = 0$ d'après les résultats de la question précédente.

Q6. On a $\chi_A = X^2 - \text{Tr}(A)X + \det(A) = X^2 - \frac{5}{4}X + \frac{1}{4} = (X - 1) \left(X - \frac{1}{4}\right)$

Comme χ_A est scindé à racines simples ; $\boxed{\text{la matrices } A \text{ est diagonalisable}}$

$$\boxed{\text{En prenant } Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \text{ on a bien } A = Q \text{diag} \left(1, \frac{1}{4}\right) Q^{-1}}$$

Q7. Les applications $M \mapsto QMQ^{-1}$ et $M \mapsto \mu_0 M$ définies sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sont continues

car linéaire d'espace de départ $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie.

Q8. On rappelle que les notions topologiques (en particulier convergence d'une suite) sont indépendantes du choix de la norme en dimension finie.

Par récurrence immédiate : $A^n = Q \operatorname{diag} \left(1, \frac{1}{4^n} \right) Q^{-1}$ pour $n \in \mathbb{N}$

En utilisant la caractérisation de la limite d'une suite de matrices selon les suites des coefficients,

on a $\operatorname{diag} \left(1, \frac{1}{4^n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \operatorname{diag} (1, 0)$

en utilisant la continuité de l'application $M \mapsto QMQ^{-1}$, on obtient

la convergence de la suite de matrices $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers $Q \operatorname{diag} \left(1, \frac{1}{4} \right) Q^{-1}$

avec la continuité de $M \mapsto \mu_0 M$: la suite des vecteurs lignes $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\mu_0 Q \operatorname{diag} (1, 0) Q^{-1}$

On a $Q \operatorname{diag} (1, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\mu_0 Q \operatorname{diag} (1, 0) = (1 \ 0)$

On trouve $Q^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ en utilisant $Q^{-1} = \frac{1}{\det(Q)} {}^t(\operatorname{com} Q)$

donc $\mu_0 Q \operatorname{diag} (1, 0) Q^{-1} = \frac{1}{3} (1 \ 2)$

donc le vecteur ligne obtenu comme limite est $(1/3 \ 2/3)$

Partie II - Spectre d'une matrice stochastique

Q9. On écrit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et on a $A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1,j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{i,j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{n,j} \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ ainsi 1 est bien valeur propre de A

Q10. On écrit $x = {}^t(x_1 \ \dots \ x_n)$ et on considère $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ tel que $|x_k| = \|x\|_\infty$

Soit $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$. On a $\left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n a_{i,j} |x_j| \leq \sum_{j=1}^n a_{i,j} |x_k| = |x_k|$

comme c'est vrai pour tout i , on conclut que $\|Ax\|_\infty \leq \|x\|_\infty$

Q11. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A et x un vecteur colonne propre associé.

On a $\|Ax\|_\infty = |\lambda| \cdot \|x\|_\infty$ or $\|x\|_\infty > 0$

En utilisant la question précédente, on conclut que : $|\lambda| \leq 1$

Localisation des valeurs propres

Q12. Soit un vecteur colonne propre $y = (y_1, \dots, y_p)$ de \mathbb{C}^p tel que $Ay = \lambda y$

comme $y \neq 0$, on peut prendre $x = \frac{1}{\|y\|_\infty} y$ de sorte que $\|x\|_\infty = 1$ et $Ax = \lambda x$

Q13. On a $\lambda x_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j$

$$\text{donc } |\lambda - a_{i,i}| = |(\lambda - a_{i,i})x_i| = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{i,j} x_j \right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{i,j} |x_j| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{i,j} = -a_{i,i} + \sum_{j=1}^n a_{i,j}$$

On a démontré que : $|\lambda - a_{i,i}| \leq 1 - a_{i,i}$

Étude d'un exemple

Q14. On vérifie facilement que A est une matrice stochastique (signe des coefficients et sommes par ligne).

On considère λ une valeur propre complexe de A

Q12 nous fournit $x \in \mathbb{C}^3$ vecteur colonne tel que $\|x\|_\infty = 1$ et $Ax = \lambda x$

Q13 nous fournit $i \in \{1, 2, 3\}$ tel que $|\lambda - a_{i,i}| \leq 1 - a_{i,i}$

donc λ est dans la réunion des disques fermés de centres $a_{i,i}$, de rayon $1 - a_{i,i}$ avec $1 \leq i \leq p$

le spectre de A est inclus dans la réunion de trois disques de centres : $1/2, 1/6, 1/3$ et de rayons $1/2, 5/6, 2/3$

Cas des matrices stochastiques strictement positives

Q16. Par l'absurde, on suppose que B' n'est pas inversible alors 0 serait valeur propre de B'.

L'inégalité admise nous fournit $i \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ tel que $|a_{i,i} - 1| \leq 1 - a_{i,i} - a_{i,p}$

Comme A est strictement positive et stochastique, on a $0 < a_{i,j} < 1$ pour tout $1 \leq j \leq p$

donc $1 - a_{i,i} = |a_{i,i} - 1| \leq 1 - a_{i,i} - a_{i,p}$ d'où $0 < a_{i,p} \leq 0$ ce qui est absurde

Ainsi B' est inversible

Q17. On suppose par l'absurde que $\dim \text{Ker}(A - I_p) \neq 1$

Comme 1 est valeur propre de A, on a $\dim \text{Ker}(A - I_p) \neq 0$,

On en déduit que $\dim \text{Ker} B = \dim \text{Ker}(A - I_p) \geq 2$

On en déduit que $\text{rg} B \leq p - 2$ car d'après le théorème du rang $\text{rg} B + \dim \text{Ker} B = p$

donc les $p - 1$ premières colonnes de B ont un rang inférieur à $p - 2$

donc $\text{rg}(B') \leq p - 2$

donc B' n'est pas inversible ce qui n'est pas d'après la question précédente.

On en déduit que $\dim \text{Ker}(A - I_p) = 1$

Partie III - Itérées d'une matrice stochastique

Un contre-exemple

Q18. La matrice B de s dans la base canonique de \mathbb{R}^2 est $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Q19. Les suites extraites de matrices $(B^{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(B^{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont constantes ;

elles convergent dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de limites respectives I_2 et B or $I_2 \neq B$

on en déduit que la suite matricielle $(B^n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

alors que B est stochastique mais non strictement positive

La Proposition 2 ne reste pas vraie en général si la matrice stochastique n'est pas strictement positive

Pour $p > 2$, il suffit de prendre comme contre-exemple : $\text{diag}(B, 1, \dots, 1)$

Résultat préliminaire

Q20. Comme N est nilpotente, N admet 0 comme unique valeur propre.

Donc le polynôme caractéristique (scindé dans $\mathbb{C}[X]$) est $\chi_N = X^p$

En appliquant Cayley-Hamilton, on a $\boxed{N^p = 0}$

Q21. Pour $n \geq k$, on a $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}$

Si $k \geq 1$, le numérateur étant un produit de k facteurs tous équivalents à n ;

on en déduit que $\boxed{\binom{n}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}}$ facilement vérifiable pour $k = 0$.

donc si $\lambda \neq 0$, par croissance comparée car $0 < |\lambda| < 1$:

$$\left| \binom{n}{k} \lambda^{n-k} \right| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^k |\lambda|^n}{k! |\lambda|^k} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

on en déduit (valable même si $\lambda = 0$) que $\boxed{\binom{n}{k} \lambda^{n-k} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0}$

Q22. Pour $n \geq p$, on a : $(\lambda I_p + N)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \lambda^{n-k} N^k$ d'après Newton car λI_p et N commutent

d'après la question **18**, on a $(\lambda I_p + N)^n = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} N^k$

pour tout $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, la suite $\left(\binom{n}{k} \lambda^{n-k} \right)_{n \geq p}$ converge vers 0 d'après la question **19**

On en déduit par combinaison linéaires (à p termes) que

$\boxed{\text{la suite de matrices } ((\lambda I_p + N)^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers la matrice nulle}}$

Convergence d'une suite de matrice

Q23. Soit A une matrice stochastique et strictement positive de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. On sait, d'après la **Proposition 1**, que 1 est valeur propre simple de A . Si $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont les autres valeurs propres complexes de A , le théorème de trigonalisation forte assure que A est semblable sur \mathbb{C} à une matrice diagonale par blocs du type

$$\text{diag}(1, \lambda_1 I_{p_1} + N_1, \dots, \lambda_r I_{p_r} + N_r)$$

avec p_1, \dots, p_r des entiers et N_1, \dots, N_r des matrices nilpotentes à coefficients complexes.

La **proposition 1** nous fournissent $r \in \mathbb{N}^*$, des complexes $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ distincts deux à deux et de 1 , N_1, \dots, N_r des matrices nilpotentes à coefficients complexes et $Q \in \text{GL}_p(\mathbb{C})$ tels que

$$A = Q \text{diag}(1, \lambda_1 I_{p_1} + N_1, \dots, \lambda_r I_{p_r} + N_r) Q^{-1}$$

donc $A^n = Q \text{diag}(1, (\lambda_1 I_{p_1} + N_1)^n, \dots, (\lambda_r I_{p_r} + N_r)^n) Q^{-1}$ par récurrence immédiate

En utilisant **Q22**,

on obtient que pour $i \in \llbracket 2, r \rrbracket$, la suite de matrices blocs $((\lambda_i I_{p_i} + N_i)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers la matrice nulle donc en utilisant la caractérisation par la limite par les coefficients

$(\text{diag}(1, (\lambda_1 I_{p_1} + N_1)^n, \dots, (\lambda_r I_{p_r} + N_r)^n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\text{diag}(1, 0_{\mathcal{M}_{p-1}})$

En utilisant la continuité de $M \mapsto QMQ^{-1}$ (comme en Q6 et Q7), $\boxed{\text{la suite } (A^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge}}$

Partie IV - Probabilité invariante par une matrice stochastique

Q24. Soit $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}} = \left((x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \right)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de vecteurs stochastiques de \mathbb{R}^n qui converge vers le vecteur $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrons que y est stochastique.

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la suite de scalaire $(x_i^{(k)})$ converge vers y_i .

comme $\forall k \in \mathbb{N}, x_i^{(k)} \geq 0$, on a $y_i \geq 0$ par passage à la limite

et comme $\forall k \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^n x_i^{(k)} = 1$, on a $\sum_{i=1}^n y_i = 1$ par passage à la limite

ainsi y est un vecteur stochastique de \mathbb{R}^n .

On a démontré par la caractérisation séquentielle que

l'ensemble des vecteurs propres stochastiques de \mathbb{R}^n est une partie fermée de \mathbb{R}^n

Convergence de la suite

Q25. Par récurrence immédiate, on a $\forall n \in \mathbb{N}, \mu_n = \mu_0 A^n$

La suite (A^n) converge vers une matrice L d'après **Q21** et comme en **Q7**, l'application $M \mapsto \mu_0 M$ est continue ainsi comme en **Q8**, (μ_n) converge une limite $\mu_\infty = \mu_0 L \in \mathbb{R}^p$.

Comme l'application linéaire $x \in \mathbb{R}^p \mapsto xA$ est continue par dimension finie au départ,

la suite $(\mu_n A)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\mu_\infty A$

et la suite extraite $(\mu_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers μ_∞

de plus pour tout $n \in \mathbb{N}, \mu_{n+1} = \mu_n A$,

d'où $\mu_\infty = \mu_\infty A$ par unicité de la limite

On a démontré que la suite $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un vecteur μ_∞ vérifiant $\mu_\infty = \mu_\infty A$

Q26. On écrit $\mu A = (m'_1, \dots, m'_p)$ et $A = (a_{i,j})$

On a pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket, m'_i = \sum_{k=1}^p m_k a_{k,i} \geq 0$ par somme et produits de réels positifs car μ est stochastique

et $\sum_{i=1}^p m'_i = \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^p m_k a_{k,i} = \sum_{k=1}^p m_k \left(\sum_{i=1}^p a_{k,i} \right) = \sum_{k=1}^p m_k = 1$ car A et μ sont stochastiques

ainsi μA est encore un vecteur stochastique

Q27. On a μ_0 est un vecteur ligne stochastique (initialisation) et $\forall n \in \mathbb{N}, \mu_{n+1} = \mu_n A$ (hérédité)

Alors par récurrence immédiate, pour tout n, μ_n est un vecteur ligne stochastique.

La suite (μ_n) converge vers μ_∞ , de plus selon **Q22**, l'ensemble des vecteurs stochastiques est une partie fermée donc μ_∞ est un vecteur ligne stochastique de \mathbb{R}^p vérifiant $\mu_\infty = A\mu_\infty$ selon **Q25**

On en déduit que μ_∞ est une probabilité invariante par A

Unicité de la probabilité invariante

Q28. Comme $\mu \in \mathbb{R}^p$ un vecteur ligne stochastique, on a

μ est une probabilité invariante de A si et seulement si $\mu A = \mu$

ce qui équivaut à ${}^t(\mu A) = {}^t\mu$ par bijectivité de la transposition

ce qui est équivalent à $1 \cdot {}^t\mu = {}^tA {}^t\mu$

${}^t\mu$ étant non nul, on a : μ est une probabilité invariante pour A , si et seulement si le vecteur colonne ${}^t\mu$ est un vecteur colonne propre de tA associé à la valeur propre 1

Q29. En utilisant deux fois le théorème du rang, l'égalité du rang d'une matrice et de sa transposée et la question **Q15**, on a :

$$\dim \text{Ker} ({}^tA - I_p) = p - \text{rg} ({}^t(A - I_p)) = p - \text{rg} (A - I_p) = \dim \text{Ker} (A - I_p) = 1$$

Ce qui justifie : $\dim \text{Ker} ({}^tA - I_p) = 1$

Q30 On suppose A admet $\mu = (m_1, \dots, m_p)$ et $\mu' = (m'_1, \dots, m'_p)$ comme probabilité invariante alors ${}^t\mu$ et ${}^t(\mu')$ sont des vecteurs colonnes propres de tA associés à la valeurs propre 1 comme $\dim E_1({}^tA) = \dim \text{Ker}({}^tA - I_p) = 1$, les vecteurs ${}^t\mu$ et ${}^t(\mu')$ sont colinéaires ce qui nous fournit $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que $\lambda {}^t\mu = {}^t(\mu')$ car μ est non nul car la somme des ses coefficients vaut 1 d'où $\lambda\mu = \mu'$ et ainsi $(\lambda m_1, \dots, \lambda m_p) = (m'_1, \dots, m'_p)$

de plus comme μ et μ' sont des vecteurs lignes stochastiques, on a $1 = \sum_{i=1}^p m'_i = \lambda \sum_{i=1}^p m_i = \lambda$

donc $\mu = \mu'$

On vient d'établir l'unicité et l'existence a été établie en **Q25**

On en déduit que A admet une unique probabilité invariante

Partie V - Informatique : calcul effectif de la probabilité invariante d'une matrice stochastique strictement positive

Q31. Les valeurs respectives renvoyées lorsque l'on exécute `len(A)`, `A[1]` et `A[2][1]` sont 4 ; [4, 5, 6] et 8

Q32. Une fonction difference :

```
def difference(x,y):
    res = []
    p=len(x)
    for i in range(p):
        res.append(x[i]-y[i])
    return res
```

Q33. Une fonction norme :

```
def norme(x):
    m=abs(x[0])
    p=len(x)
    for i in range(1,p):
        if abs(x[i])>m:
            m=abs(x[i])
    return m
```

Q34. Une fonction itere :

```
def itere(x,A):
    p=len(x)
    res=[]
    for j in range(p):
        coef=0
        for i in range(p):
            coef+=x[i]*A[i][j]
        res.append(coef)
    return res
```

Q35. Une fonction probaInvariante :

```
def probaInvariante(A,eps):
    p=len(A)
    u=[1/p for i in range(p)]
    v=itere(u,A)
```

```
while norme(difference(v,u))>eps:  
    u=list(v)# on fait une copie de liste  
    v=itere(v,A)  
return v
```