DS 6

Une correction

Exercice 2

La famille $\left(\dfrac{1}{(p+q+1)2^{p+q}}\right)$ est composée de termes **positifs**. La série double est donc (absolument) convergente si et seulement si la série des sommes en diagonale est convergente.
On pose $S_n = \sum_{p+q=n} a_{a,p} = \sum_{p+q=n} \dfrac{1}{(n+1)2^n} = \dfrac{1}{(n+1)2^n} \sum_{p+q=n} 1 = \dfrac{n+1}{(n+1)2^n} = 2^{-n}$.
Or la série $\sum 2^{-n}$ est convergente car géométrique de raison $1/2$ de module strictement inférieur à 1. Donc la série double est convergente est de somme

$$\boxed{S = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} = 2.}$$

Exercice 3

1. La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{1+4t^2x^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

Au voisinage de l'infini, comme $x > 0$, $0 \leqslant |f(t)| = O(\dfrac{1}{t^2})$ (utiliser le $O()$ plutôt que $\sim$ où il faudrait conserver $\dfrac{1}{4t^2x^2}$).

Par critère de Riemann $(2 > 1)$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est une intégrale convergente.

Par théorème de comparaison d'intégrales de fonctions positives, f est intégrable au voisinage de $+\infty$

Finalement, l'intégrale $I(x)$ étudiée est absolument convergente, donc convergente.

Après changement de variables C^1 bijectif, on trouve $\boxed{I(x) = \dfrac{\pi}{4x}}$

2. Posons $u_n : x \in]0, +\infty[\mapsto \dfrac{1}{1+4n^2x^2}$.

Soit $x \neq 0$. Alors $0 \leqslant |u_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{4n^2x^2} = O(1/n^2)$.

Par critère de Riemann pour les série numériques $(2 > 1)$, la série numérique $\sum 1/n^2$ est convergente. Donc par théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum |f_n(x)|$ est une série numérique absolument convergente, donc convergente.

Donc $\boxed{F \text{ est définie sur } \mathbb{R}^*}$ et $\sum u_n$ est une série de fonctions qui converge simplement vers F sur $\mathbb{R}^*$.

De plus, $\mathbb{R}^*$ est un ensemble symétrique par rapport à 0 et pour $x \in \mathbb{R}^*$, $u_n(-x) = u_n(x)$, donc $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ et $F(-x) = F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

$\boxed{F \text{ est donc une fonction paire}}$.

3. • On applique le théorème de dérivation des sommes de séries de fonctions.

En notant $u_n(x) = \dfrac{1}{1+4\,n^2\,x^2}$ pour n dans $\mathbb{N}^*$ et x dans $\mathbb{R}$, on a

$u_n \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ avec $u_n'(x) = -\dfrac{8\,n^2\,x}{(1+4\,n^2\,x^2)^2}$ pour tout (n,x) dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$.

Pour $0 < a < b$ et $x \in [a,b]$ on a $|u_n'(x)| \leqslant \dfrac{8\,n^2\,x}{(4\,n^2\,x^2)^2} = \dfrac{1}{2\,n^2\,x^3}$, donc $\|u_n'\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \dfrac{1}{2\,n^2\,a^3}$ et, avec la convergence de la série numérique $\sum \dfrac{1}{n^2}$, la série de fonctions $\sum u_n'$ est normalement convergente sur le segment $[a,b]$. Ainsi, avec le théorème sus-nommé, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a,b]$ avec $F'(x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8\,n^2\,x}{(1+4\,n^2\,x^2)^2}$ pour tout x dans $[a,b]$.

• Avec $\mathbb{R}_+^* = \bigcup\limits_{x\in\mathbb{R}_+^*} [\frac{x}{2}, x+1]$ et la parité de F, on en déduit

$\boxed{F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^*) \text{ et } F'(x) = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{8\,n^2\,x}{(1+4\,n^2\,x^2)^2} \text{ pour tout } x \neq 0}$.

4. Pour $x > 0$, la fonction $m(x,\cdot)$ étant continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+$ on a, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{1+4\,n^2\,x^2} = m(x,n) \times 1 = \displaystyle\int_{n-1}^{n} m(x,n)\,dt \leqslant \int_{n-1}^{n} m(x,t)\,dt$,

c'est-à-dire $\boxed{\forall x > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{1+4\,n^2\,x^2} \leqslant \displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{dt}{1+4\,x^2\,t^2}}$.

Cette majoration est classique et permet de retrouver le théorème de comparaison séries-intégrales.

Alors, pour tout N dans $\mathbb{N}^*$, avec la relation de Chasles pour les intégrales, on a

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{1+4\,n^2\,x^2} \leqslant \sum_{n=1}^{N} \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{1+4\,x^2\,t^2} = \int_0^N \frac{dt}{1+4\,x^2\,t^2}.$$

Avec la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+4\,t^2\,x^2}$ et la convergence de la série dont F est la somme, on obtient $\boxed{\forall x > 0,\ F(x) \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+4\,t^2\,x^2}}$.

5. Avec $\dfrac{1}{1+4\,n^2\,x^2} \geqslant \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dt}{1+4\,x^2\,t^2}$ pour tout n dans $\mathbb{N}$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{1+4\,n^2\,x^2} \geqslant \sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} \frac{dt}{1+4\,x^2\,t^2} = \int_1^{N+1} \frac{dt}{1+4\,x^2\,t^2}$$

puis, $F(x) \geqslant \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+4\,x^2\,t^2} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+4\,x^2\,t^2} - \int_0^1 \frac{dt}{1+4\,x^2\,t^2}$

et, avec $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+4\,x^2\,t^2} \leqslant \int_0^1 dt = 1$, on obtient finalement

$\boxed{\forall x > 0,\ F(x) \geqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+4\,x^2\,t^2} - 1}$

6. • Avec le résultat obtenu en question 1, on a donc

$\forall x > 0,\ \dfrac{\pi}{4\,x} - 1 \leqslant F(x) \leqslant \dfrac{\pi}{4\,x}$, i.e. $1 - \dfrac{4\,x}{\pi} \leqslant \dfrac{F(x)}{\pi/4x} \leqslant 1$,

ce qui donne par encadrement $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{F(x)}{\pi/4x} = 1$, c'est-à dire $\boxed{F(x) \sim_{x\to 0^+} \dfrac{\pi}{4\,x}}$.

• Avec $0 \leqslant F(x) \leqslant \dfrac{\pi}{4\,x}$, par encadrement on a $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0}$.

7. On pose $p(x,t) = \dfrac{\sin(t)}{e^{2\,x\,t} - 1}$ pour tout (x,t) dans $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $x > 0$, $p(x, \cdot)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et avec $\sin(t) \sim_{t\to 0} t$ et $[e^{2\,x\,t} - 1] \sim_{t\to 0} 2\,x\,t$ on a $\lim\limits_{t\to 0^+} p(x,t) = \dfrac{1}{2\,x}$, donc en posant $p(x,0) = \dfrac{1}{2\,x}$, la fonction $p(x,\cdot)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Avec

$|p(x,t)| \leqslant \dfrac{1}{e^{2\,x\,t}-1}$, $\quad \dfrac{1}{e^{2\,x\,t}-1} \sim_{t\to+\infty} e^{-2\,x\,t}$, $\quad e^{-2\,x\,t} =_{t\to+\infty} O(\dfrac{1}{t^2})$,

les résultats connus sur les intégrales de Riemann et les théorèmes relatifs aux comparaisons pour les intégrales, $p(x,\cdot)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc l'intégrale définissant G est convergente et $\boxed{G \text{ est définie sur } \mathbb{R}_+^*}$.

8. Pour tout $x > 0$, $p(x,\cdot)$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout t dans $\mathbb{R}_+^*$, $p(\cdot,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour tout segment $[a,b]$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$ $(0 < a < b)$ et tout (x,t) dans $[a,b]\times\mathbb{R}_+^*$, avec $\sin(t) \leqslant t$, on a $p(x,t) \leqslant \varphi(t)$ avec $\varphi(t) = \dfrac{t}{e^{2\,a\,t}-1}$.

ici, majorer $\sin(t)$ *par 1 ne marche pas... !*

Avec $\lim\limits_{t\to 0^+} \varphi(t) = \dfrac{1}{2\,a}$ et $\varphi(t) =_{t\to+\infty} O(\dfrac{1}{t^2})$ (comme ci-dessus), la fonction φ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc aussi sur $\mathbb{R}_+^*$, et le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre (dans sa version locale) donne

$\boxed{G \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+^*}$.

9. Pour $\alpha > 0$, l'application $[t \mapsto \sin(t)\,e^{-\alpha\,t}]$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et avec $\sin(t)\,e^{-\alpha\,t} \leqslant e^{-\alpha\,t}$ et $e^{-\alpha\,t} =_{t\to+\infty} O(\dfrac{1}{t^2})$ (puisque $\alpha > 0$), on a l'intégrabilité donc la convergence de l'intégrale.

Comme $\sin(t)$ est la partie imaginaire de $e^{i\,t}$, cette intégrale est la partie imaginaire de $\int_0^{+\infty} e^{(-\alpha+i)\,t}\,dt$.

En notant $a = (-\alpha + i) \neq 0$, pour tout $x > 0$ on a

$$\int_0^x e^{a\,t}\,dt = \frac{1}{a}\int_0^x e^{a\,t}\,dt = \frac{e^{a\,x}-1}{a}.$$

Avec $e^{a\,x} = e^{-\alpha\,x}\,e^{i\,x}$ on a $e^{a\,x} = e^{-\alpha\,x}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{a\,x} = 0$ et

$$\int_0^{+\infty} e^{a\,t}\,dt = -\frac{1}{a} = \frac{1}{\alpha - i} = \frac{\alpha + i}{\alpha^2+1}$$

et finalement $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)\,e^{-\alpha\,t}\,dt = \frac{1}{\alpha^2+1}}$.

10. Pour tout $x > 0$ et tout $t > 0$ on a $-2\,x\,t > 0$ donc $e^{-2\,x\,t} \in]0,1[$, donc avec la série géométrique :

$\forall x > 0,\ \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \dfrac{1}{1-e^{-2\,x\,t}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} [e^{-2\,x\,t}]^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-2\,n\,x\,t}$.

Avec $p(x,t) = e^{-2\,x\,t}\,\sin(t)\,\dfrac{1}{1-e^{-2\,x\,t}}$, on obtient $p(x,t) = e^{-2\,x\,t}\,\sin(t)\,\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-2\,n\,x\,t}$, c'est-à-dire

$\boxed{\forall x > 0,\ \forall t > 0,\ \dfrac{\sin(t)}{e^{2\,x\,t}-1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin(t)\,e^{-2\,n\,x\,t}}$.

11. *(Il s'agit ici d'utiliser ici un des deux théorèmes qui permettent d'intervertir la sommation discrète et l'intégrale ; on pourrait utiliser le théorème de convergence dominée avec la suite des somme partielles d'autant que la majoration brutale* $\sin(t) \leqslant 1$ *ne permet pas d'utiliser celui de Beppo-Levi ; mais la mise en œuvre du premier théorème est assez lourde et heureusement, la majoration plus subtile* $\sin t \leqslant t$ *va nous permettre d'utiliser le deuxième)*

En posant $f_n(t) = \sin(t)\,e^{-2\,n\,x\,t}$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ et t dans $\mathbb{R}_+$, on a f_n continue sur $\mathbb{R}_+$ et avec $f_n(t) \leqslant t\,e^{-2\,n\,x\,t}$, une intégration par parties donne pour tout y dans $\mathbb{R}_+$,

$$\int_0^y f_n(t)\,dt \leqslant \int_0^y t\,e^{-2\,n\,x\,t}\,dt = \left[-\frac{t\,e^{-2\,n\,x\,t}}{2\,n\,x}\right]_0^y + \frac{1}{2\,n\,x}\int_0^y e^{-2\,n\,x\,t}\,dt$$

$$\int_0^y f_n(t)\,dt \leqslant -\frac{y\,e^{-2\,n\,x\,y}}{2\,n\,x} + \frac{1}{(2\,n\,x)^2}\left[-e^{-2\,n\,x\,t}\right]_0^y.$$

Avec $\lim_{y\to+\infty} e^{-2nxy} = 0$ on obtient $N_1(f_n) = \int_0^{+\infty} f_n \leqslant \frac{1}{4x^2} \times \frac{1}{n^2}$. Comme la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente, le théorème d'intégration terme à terme donne (sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^* =]0,+\infty[$ pour garder le développement avec la série géométrique) l'interversion et on a (avec la continuité de f_n sur $\mathbb{R}_+ = [0,+\infty[$)

$\int_{]0,+\infty[} p(x,\cdot) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{]0,+\infty[} \sin(t)\, e^{-2nxt}\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[0,+\infty[} \sin(t)\, e^{-2nxt}\, dt.$

Avec le résultat obtenu dans la question précédente, on obtient finalement

$\boxed{\forall x > 0,\ G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+4n^2x^2} = F(x)}$.

Exercice 4

Pour tout réel $x \in [0,+\infty[$ on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x.t^2}}{1+t^2}\, dt$.

1. Fixons $x \geqslant 0$: dans ce cas la fonction $t \to \frac{e^{-x.t^2}}{1+t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$. seul se pose un problème d'intégrabilité en $+\infty$,or $0 \leqslant \frac{e^{-x.t^2}}{1+t^2} \leqslant \frac{1}{1+t^2}$ donc $F(x)$ existe.

   Montrons que F est continue sur $[0,+\infty[$:

   considérons l'application $g : (x,t) \to \frac{e^{-x.t^2}}{1+t^2}$

   * $\forall x \in [0,+\infty[,\ t \to \frac{e^{-x.t^2}}{1+t^2}$ est C_m^0 sur $[0,+\infty[$

   * $\forall t \in [0,+\infty[,\ x \to \frac{e^{-x.t^2}}{1+t^2}$ est C^0 sur $[0,+\infty[$

   * hypothèse de domination: $\forall (x,t) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[,\ \left|\frac{e^{-x.t^2}}{1+t^2}\right| \leqslant \frac{1}{1+t^2}$ qui est intégrable sur $[0,+\infty[$

   Ainsi F est continue sur $[0,+\infty[$

2. Dérivabilité de F : considérons deux réels a, b tels que $0 < a < b$

   l'application g admet une dérivée partielle par rapport à x en tout point de $[a,b]\times[0,+\infty[$ $\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \frac{-t^2}{1+t^2} e^{-x.t^2}$

   * $\forall x \in [a,b],\ t \to -\frac{t^2 e^{-x.t^2}}{1+t^2}$ est C^0 sur $[0,+\infty[$

   * $\forall t \in [0,+\infty[,\ x \to -\frac{t^2 e^{-x.t^2}}{1+t^2}$ est C^0 sur $[a,b]$

   * hypothèse de domination: $\forall (x,t) \in [a,b]\times[0,+\infty[,\ \left|-\frac{t^2 e^{-x.t^2}}{1+t^2}\right| \leqslant \frac{t^2}{1+t^2} e^{-a.t^2} \leqslant e^{-a.t^2}$qui est intégrable sur $[0,+\infty[$

   Ainsi F est de classe C^1 sur $[a,b]$ et

   $$F'(x) = -\int_0^{\infty} t^2 \frac{e^{-x.t^2}}{1+t^2}\, dt.$$

   F est donc de classe C^1 sur $]0,+\infty[$

3. Appliquons le théorème de convergence dominée , on considère pour cela une suite **quelconque** x_n qui tend vers +∞, on pose $f_n(t) = \frac{e^{-x_n.t^2}}{1+t^2}$et on utilise la domination $|f_n(t)| \leqslant \frac{1}{1+t^2}$ qui est une fonction intégrable sur $[0,+\infty[$. la suite de fonctions f_n converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,+\infty[$ donc

   $$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} g_n(t)dt = \int_0^{\infty} \lim_{n\to\infty} g_n(t)dt = 0$$

   puis on conclût grâce à la définition séquentielle de la limite d'une fonction en +∞ et donc $\lim_{x\to\infty} F(x) = 0$.

   Remarquons de plus que $F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = [\arctan x]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$

x	0		$+\infty$
$F'(x)$	$\|\|$	$-$	
$F(x)$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0

4. On remarque que

   $$F(x) - F'(x) = \int_0^{\infty} \frac{(1+t^2)e^{-x.t^2}}{1+t^2} dt = \int_0^{\infty} e^{-x.t^2} dt$$

or le changement de variable $u = \sqrt{x}t$ fournit

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x.t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u^2} dt = \frac{I}{\sqrt{x}}$$

ainsi F est solution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre

5. (a) posons $G(x) = e^{-x}F(x)$: la fonction G est continue sur $[0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$

   $G(0) = F(0) = \int_0^\infty \dfrac{1}{1+t^2}\, dt = \frac{\pi}{2}$

   De plus

   $$\forall x > 0, G'(x) = -e^{-x}F(x) + e^{-x}F'(x) = -e^{-x}\frac{I}{\sqrt{x}}$$

   La fonction $t \to \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0, x]$ car elle est continue sur $]0, x]$ et en 0 on a

   $$\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \sim_{t\to 0} \frac{1}{t^{1/2}}$$

   avec $1/2 < 1$.

   On intègre l'égalité $G'(x) = -e^{-x}\frac{I}{\sqrt{x}}$ entre ε et x

   $$\int_\varepsilon^x -e^{-t}\frac{I}{\sqrt{t}}dt = \int_\varepsilon^x G'(t)dt = G(x) - G(\varepsilon)$$

   puis pour $\varepsilon \to 0$

   $$-I\int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt = G(x) - \frac{\pi}{2}$$

   (b) posons $t = u^2$ soit $u = \sqrt{t}$ et $dt = 2udu$

   $$G(x) = -I\int_0^{\sqrt{x}} \frac{e^{-u^2}}{u}2udu + \frac{\pi}{2} = -2I\int_0^{\sqrt{x}} e^{-u^2}du + \frac{\pi}{2}$$

   or $G(x) = e^{-x}F(x) \to_{x\to+\infty} 0$ donc

   $$0 = \lim_{x\to\infty} G(x) = \lim_{x\to\infty} -2I\int_0^{\sqrt{x}} e^{-u^2}du + \frac{\pi}{2} = -2I^2 + \frac{\pi}{2}$$

   On en déduit l'égalité

   $$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Exercice 5

1. Soit $x \in]-1,1[$. On a $\lim_{n\to+\infty} x^n = 1$, donc $1 - x^n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{|a_n x^n|}{1-x^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} |a_n x^n| \geqslant 0$, or le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$ est 1, donc la série $\sum a_n x^n$ cva et par comparaison, la série $\boxed{\sum_{n\geq 1} \dfrac{a_n x^n}{1-x^n} \text{ cva}}$.

2. • Tout revient à montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ forment une partition de A.

Chaque $I_n \subset A$, donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} I_n \subset A$.

Soit $(k,p) \in A$, comme $(k,p) \in I_{kp} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} I_n$, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} I_n = A$.

Si on suppose que $\exists (k,p) \in I_n \bigcap I_m$, alors $kp = n = m$, donc $I_n = I_m$, donc $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ forment une partition de A.

La famille $(u_{n,p})_{(n,p)\in A}$ est sommable, par le théorème de sommation par paquets on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{(k,p)\in I_n} u_{k,p}\right)$$

• Soit $x \in]-1,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum_{p\geq 1} a_n x^{np}$ converge absolument et $\sum_{p=1}^{+\infty} |a_n||x|^{np} = |a_n|\dfrac{|x|^n}{1-|x|^n}$ et la série $\sum |a_n|\dfrac{|x|^n}{1-|x|^n}$ converge par Q1, donc la famille donnée est sommable, en appliquant ce qui précède à $u_{n,p} = a_n x^{np}$:

$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty} a_n x^{np} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{(k,p)\in I_n} a_k x^{kp}$.

Or $\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{(k,p)\in I_n} a_k x^{kp} = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \sum_{(k,p)\in I_n} a_k = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \sum_{d/n} a_d = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$.

Et on a $\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty} a_n x^{np} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \dfrac{x^n}{1-x^n}$ série géométrique.

Donc $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \dfrac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$.

3. Ici $a_n = 1$, donc le b_n de la question précédente est $b_n = \sum_{d/n} 1 = d_n$, par application du résultat de la question précédente, on a :

$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \dfrac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n x^n$.

4. Ici $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \varphi(n) = \text{Card}\{k \in [\![1,n]\!] \ / \ k \wedge n = 1\}$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq a_n \leq n$, par comparaison le rayon de la série $\sum a_n x^n$ est 1.

On a les diviseurs de 12 sont $1, 2, 3, 4, 6$ et 12, or $\varphi(1) = 1$, $\varphi(2) = 1$, $\varphi(3) = 2$, $\varphi(4) = 2$, $\varphi(6) = 2$ et $\varphi(12) = 4$ l'égalité est donc vraie pour $n = 12$.

Soit $x \in]-1,1[$. Par application de la question 7), $\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n)\dfrac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$, avec ici $b_n = \sum_{d/n} \varphi(d) = n$, alors $\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n)\dfrac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n$.

Or $\forall x \in]-1,1[$, $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, en dérivant on obtient $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = \dfrac{x}{(1-x)^2}$.

Alors $\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n)\dfrac{x^n}{1-x^n} = \dfrac{x}{(1-x)^2}}$ c'est ce qui est demandée.

5. On a $\forall x \in [0,1[$, $-\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{x^n}{n}$.

1 est dans l'adhérence de $[0,1[$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x\to 1^-} (-1)^n \dfrac{x^n}{n} = \dfrac{(-1)^n}{n} \in \mathbb{R}$, pour $x \in [0,1[$ la série $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \dfrac{x^n}{n}$ est une série alternée qui vérifie $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{x^n}{n} = 0$ et la suite $\left(\dfrac{x^n}{n}\right)_n$ est décroissante, alors par CSSA :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k \dfrac{x^k}{k}\right| \leq \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \leq \dfrac{1}{n+1}$ or $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$, la convergence de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1}(-1)^n \dfrac{x^n}{n}$ est uniforme, le théorème de la double limite s'applique et on a $\boxed{-\ln 2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}}$.

6. Soit $a \in]0,1[$. On a $\forall x \in [-a,a], \forall n \in \mathbb{N}^*$ $0 < 1-a^n \leq 1-x^n$, donc :

$\forall x \in [-a,a], \forall k \in \mathbb{N}^*$ $\left|(-1)^k \dfrac{x^{k-1}}{1-x^k}\right| \leq \dfrac{a^{k-1}}{1-a^k}$.

Or la série $\sum_{k\geq 1} \dfrac{a^{k-1}}{1-a^k}$ converge car $\dfrac{a^{k-1}}{1-a^k} \underset{k\to+\infty}{\sim} a^{k-1}$ et la série $\sum a^{k-1}$ converge, la convergence de $\sum_{k\geq 1}(-1)^k \dfrac{x^{k-1}}{1-x^k}$ est donc uniforme sur $[-a,a]$.

De plus $\lim_{x\to 0}(-1)^k \dfrac{x^{k-1}}{1-x^k} = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad k=1 \\ 0 & \text{si} \quad k \neq 1 \end{cases}$

le théorème de la double limite s'applique et on a :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n-1}}{1-x^n} = -1$$

Un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 0$ est $-x$.

On a $f(0) = 0$, donc $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$, alors $f'(0) = -1 = a_1$ c'est ce qu'on a trouver à la question 6).

7. Toujours $a_n = (-1)^n$ et $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \dfrac{x^{n-1}}{1-x^n}$

Donc $(1-x)f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n x^{n-1} \dfrac{(1-x)}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \dfrac{x^{n-1}}{1+x+x^2+...+x^{n-1}}$.

Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $g_n(x) = (-1)^n \dfrac{x^{n-1}}{1+x+x^2+...+x^{n-1}}$.

le 1 est dans l'adhérence de $[0,1[$,

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x\to 1^-} g_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n}$,

Soient $x \in [0,1[$ et $k \in [\![0,(n-1)]\!]$, on a $x^{n-1} \leq x^k$:

Donc $nx^{n-1} \leq 1+x+x^2+...+x^{n-1}$,

Alors $\forall x \in]0,1[; \forall n \in \mathbb{N}^*$; $|g_n(x)| \leq \dfrac{x^{n-1}}{nx^{n-1}} \leq \dfrac{1}{n}$.

Soit $x \in]0,1[$. Les deux suites $(x^{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\dfrac{1}{1+x+x^2+...+x^{n-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont décroissantes et elles sont positives, donc la suite $(|g_n(x)|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante comme elle est positive et tend vers 0, le CSSA s'applique et on a $\forall n \in \mathbb{N}$; $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} g_k(x)\right| \leq |g_{n+1}(x)| \leq \dfrac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Alors la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} g_n$ converge uniformément sur $]0,1[$, le théorème de la double limite s'applique et on a ;

$\lim_{x\to 1^-}(1-x)f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to 1^-} g_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$ d'après la question 10).

Alors $(1-x)f(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} -\ln 2$, qui s'écrit $f(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \dfrac{-\ln 2}{(1-x)}$.