DS 6 : UNE CORRECTION

Vendredi 26 janvier 2018

Exercice 1 : CCP 2003 MP

Soit E l'ensemble des fonctions continues sur le segment $[-1,1]$ à valeurs réelles.

1. Tout réel θ vérifie $\cos(n\theta) = \Re e\left((\cos\theta + i\sin\theta)^n\right) = \Re e\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\cos\theta)^{n-k}\, i^k\, (\sin\theta)^k\right)$

Or i^k est réel quand k est pair et imaginaire pur sinon, ainsi

$$\cos(n\theta) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k} (\cos\theta)^{n-2k}\, i^{2k}\, (\sin\theta)^{2k} = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \binom{n}{2k} (\cos\theta)^{n-2k}\, (1-(\cos\theta)^2)^k$$

Finalement, $\boxed{\text{le polynôme } T = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \binom{n}{2k} X^{n-2k}\,(1-X^2)^k \text{ convient.}}$

En effet, c'est un polynôme à coefficients réels vérifiant $T(\cos\theta) = \cos(n\theta)$ pour tout réel θ. Pour tout k, le polynôme $X^{n-2k}\,(1-X^2)^k$ est degré n donc, par somme, T est de degré au plus n. Son coefficient de degré n est $\sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \binom{n}{2k} (-1)^k = \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k}$ qui est non nul (somme de termes strictement positifs) donc T est bien de degré n.

Si P et Q sont deux polynômes réels de degré n vérifiant $P(\cos\theta) = Q(\cos\theta) = \cos(n\theta)$ pour tout réel θ. Alors $P-Q$ est un polynôme réel de degré au plus n admettant une infinité de racines puisque tout réel s'écrivant $\cos(\theta)$, i.e. tout réel de $[-1;1]$, est un zéro de $P-Q$. Le polynôme $P-Q$ est donc le polynôme nul et on a bien $P=Q$.

$\boxed{\text{Le polynôme } T \text{ est donc unique.}}$

2. Pour toute fonction h de E, l'application $\beta : t \in]-1;1[\mapsto h(t)/\sqrt{1-t^2}$ est continue comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.
De plus, l'application $t \mapsto h(t)/\sqrt{1+t}$ est continue sur le segment fermé $[0;1]$ (comme quotient de fonctions continues) donc elle y est bornée en valeur absolue. Soit M un de ses majorants. La fonction continue H vérifie alors $|\beta(t)| \leqslant M/\sqrt{1-t}$ or $t \mapsto 1/\sqrt{1-t}$ est intégrable sur $[0;1[$ (c'est une fonction de référence) donc β est intégrable sur $[0;1[$.
De la même façon, β est intégrable sur $]-1;0]$.
Finalement $\boxed{t \in]-1;1[\mapsto \frac{h(t)}{\sqrt{1-t^2}} \text{ est intégrable sur }]-1;1[.}$

3. Soit f et g dans E, alors $f \times g$ est aussi dans E car le produit de fonctions continues est une fonction continue, donc $< f, g >$ est bien défini. De plus, on a
• pour toute fonction f et g de E, $< f, g > = < g, f >$ (symétrie) ;
• pour tout f de E, l'applications $h \in E \mapsto < f, h >$ est linéaire (par linéarité de l'intégrale) donc $h \in E \mapsto < h, f >$ aussi par symétrie ;
• pour tout f de E, on a $< f, f > \geqslant 0$ car $t \mapsto f(t)f(t)/\sqrt{1-t^2}$ est une fonction positive sur $]-1;1[$ donc pour tout x positif, comme $-x \leqslant x$, l'intégrale $\int_{-x}^{x} f(t)f(t)/\sqrt{1-t^2}\,dt$ est positive donc sa limite $< f, f >$ aussi.
• Si f est dans E et vérifie $< f, f > = 0$ alors f est la fonction nulle (d'après le théorème de l'intégrale nulle d'une fonction positive et continue, on sait que f^2 est nulle).
Ainsi, on vient de vérifier les propriétés permettant d'affirmer que $\boxed{<,> \text{ est un produit scalaire.}}$

4. Soit n et m deux entiers naturels. Les fonctions T_n et T_m appartiennent bien à E. On a

$$< T_n, T_m >= \int_{-1}^{1} \frac{\cos(n \arccos t)\ \cos(m \arccos t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \lim_{x\to 1^-} \int_{-x}^{x} \frac{\cos(n \arccos t)\ \cos(m \arccos t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$$

Or pour tout x strictement positif, la fonction arccos est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-x;x]$ donc est un changement de variables licite sur $[-x;x]$. De plus $\arccos'(t) = -1/\sqrt{1-t^2}$. Ainsi, en faisant le changement de variables , on obtient

$$<T_n, T_m>= \lim_{x\to 1^-} \left(-\int_{\arccos(-x)}^{\arccos(x)} \cos(ns)\ \cos(ms)\, ds \right) = \lim_{x\to 1^-} \int_{\arccos(x)}^{\arccos(-x)} \frac{\cos((n+m)s) + \cos((m-n)s)}{2}\, ds$$

Or les fonctions $s \mapsto \cos((n+m)s)$ et $s \mapsto \cos((m-n)s)$ sont continues sur $[0;\pi]$ intervalle contenant $[\arccos(x);\arccos(-x)]$, donc par linéarité de l'intégrale puis passage à la limite, on obtient $< T_n, T_m >= \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi} \cos((n+m)s)\, ds + \dfrac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos((m-n)s)\, ds$
$= \frac{\pi\,(\delta_{n+m,0}+\delta_{m-n,0})}{2}$ $\boxed{\text{Ainsi, on a } < T_n, T_m >= 0 \text{ si } n \neq m \text{ et } < T_n, T_n >= \pi \text{ si } n = 0 \text{ et } \pi/2 \text{ sinon.}}$
Ainsi, $\boxed{\text{pour tout naturel } n, \text{ la famille } (T_0, T_1, ..T_n) \text{ est une famille orthogonale de } E_n}$ puisque les éléments T_i sont bien dans E_n.

5. **a.** L'ensemble E_n est un sous-espace vectoriel de dimension finie de l'espace vectoriel E qui est muni d'une norme euclidienne. Ainsi $\boxed{\text{le théorème de projection}}$ sur un sous-espace vectoriel de dimension finie assure que pour tout élément f de E, il existe un unique vecteur $t_n(f)$ de E_n réalisant la distance de f à E_n. C'est la projection orthogonale de f sur E_n.

b. D'après la question 6, la famille $(T_0, T_1, ..T_n)$ est une famille orthogonale de E_n. Aucun des T_i n'étant nul, la famille $(T_0/\|T_0\|_2, ..., T_n/\|T_n\|_2)$ est une famille orthonormale de E_n, contenant $n+1 = \dim E_n$ vecteurs, c'est donc une base orthonormale de E_n. Ainsi

$$\boxed{t_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \frac{< f, T_k >}{\|T_k\|_2} \frac{T_k}{\|T_k\|_2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{< f, T_k >}{< T_k, T_k >} T_k}$$

6. D'après la question 7a et la bilinéarité de $<,>$, on a

$$d_2(f, E_n) = \sqrt{< f - t_n(f), f - t_n(f) >} = \sqrt{\|f\|_2^2 - 2 < f, t_n(f) > + \|t_n(f)\|_2^2}$$

Or la question 7b et la linéarité de $< f, . >$ montrent que $< f, t_n(f) >= \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{< f, T_k >^2}{< T_k, T_k >}$.
Par ailleurs, la famille $(T_0, ..T_n)$ étant orthogonale, on a aussi

$$\|t_n(f)\|_2^2 = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{< f, T_k >}{< T_k, T_k >} \right)^2 < T_k, T_k >= \sum_{k=0}^{n} \frac{< f, T_k >^2}{< T_k, T_k >}$$

D'où en regroupant ces deux expressions

$$\boxed{d_2(f, E_n) = \sqrt{\|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{< f, T_k >^2}{\|T_k\|_2^2}}}$$

7. **a.** Comme E_n est inclus dans E_{n+1}, la suite $(d_2(f, E_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Or elle est minorée (par 0) donc convergente. Ainsi la suite de terme général $(d_2(f, E_n))^2$ qui vaut $\|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^{n} < f, T_k >^2 / \|T_k\|_2^2$ est convergente. Donc d'après le théorème sur les opérations sur les suites convergentes, la suite de terme général $\sum_{k=0}^{n} \frac{<f,T_k>^2}{\|T_k\|_2^2}$ est convergente i.e. $\boxed{\text{la série } \sum_{k\geqslant 0} \frac{<f,T_k>^2}{\|T_k\|_2^2} \text{ est convergente.}}$

b. La série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{<f, T_k>^2}{\|T_k\|_2^2}$ est convergente. Son terme général tend donc vers zéro. Or pour $k > 0$, on a $< T_k, T_k >= \pi/2$ (question 6), donc par produit, la suite de terme général $< f, T_k >^2$ converge vers zéro donc celle de terme général $< f, T_k >$ aussi.

Ainsi $\boxed{\text{la suite de terme général } \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(t)\,T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \text{ tend vers zéro.}}$

8. a. Sur $[-1;1]$, on a $|f(x)/\sqrt{x^2-1}\,| \leqslant \|f\|_\infty/\sqrt{x^2-1}$. Or comme la fonction constante $\|f\|_\infty$ est dans E, on a par croissance de l'intégrale à bornes croissantes (les deux membres suivants existant bien)

$$\int_{-1}^{1} \frac{f^2(x)}{\sqrt{x^2-1}}\,dx \leqslant \int_{-1}^{1} \frac{\|f\|_\infty^2}{\sqrt{x^2-1}}\,dx \quad \text{i.e.} \quad \|f\|_2^2 \leqslant \|f\|_\infty^2 < T_0, T_0 >$$

Ainsi d'après la question 6 et en prenant la racine carrée, on obtient $\boxed{\|f\|_2 \leqslant \sqrt{\pi}\ \|f\|_\infty}$

b. La fonction f est continue sur le segment fermé borné $[-1;1]$, donc y est limite uniforme d'une suite de fonctions polynômiales $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'après le théorème de Weierstrass. On définit alors la suite d'entiers naturels $(\alpha_n = \max(\deg P_n, 0))_{n\in\mathbb{N}}$.
Par définition du polynôme $t_{\alpha_n}(f)$, on a $\|f - t_{\alpha_n}(f)\|_2 \leqslant \|f - P_n\|_2$. La question 10, comme $f - P_n$ est dans E, assure $\|f - T_n\|_2 \leqslant \sqrt{\pi}\ \ \|f - P_n\|_\infty$. Ainsi $\|f - t_{\alpha_n}(f)\|_2 \leqslant \sqrt{\pi}\,\|f - P_n\|_\infty$.
Or la suite de terme général $\|f - P_n\|_\infty$ converge vers 0 et par comparaison $(\|f - t_{\alpha_n}\|_2)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi. Finalement, on obtient :
$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N|\forall n \geqslant N \quad \|f - t_{\alpha_n}(f)\|_2) < \varepsilon$ (convergence de la suite vers 0)
$\forall p \geqslant \alpha_N \quad \|f - t_p(f)\|_2 \leqslant \|f - t_{\alpha_N}(f)\|_2$ (décroissance de la suite $(d_2(f, E_k))_{k\in\mathbb{N}}$)
et donc $\|f - t_p(f)\|_2 < \varepsilon$

On a donc exactement écrit que $\boxed{\text{la suite } (\|f - t_p(f)\|_2)_{p\in\mathbb{N}} \text{ converge vers 0.}}$

9. Soit une fonction h de E telle que $\int_{-1}^{1} \frac{h(t)\,T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = 0$ pour tout n autrement dit $< h, T_n >= 0$ pour tout n. Alors d'après la question précédente, la norme $\|h\|_2$ est nulle et donc $\boxed{h \text{ est la fonction nulle sur } [-1;1].}$

Centrale 2016 - PSI 2 un corrigé

0.1 Transformation de Fourier

1.A φ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1/2, 1/2\}$ et en $\pm 1/2$, elle admet des limites finies à droite et gauche. C'est donc une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Les seuls problèmes d'intégrabilité sont aux voisinages des infinis où φ est nulle et donc intégrable. Finalement

$$\varphi \in E_{cpm}$$

On a immédiatement

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \mathcal{F}(\varphi)(x) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2i\pi xt}\,dt = \left[-\frac{1}{2i\pi x}\right]_{-1/2}^{1/2} = -\frac{1}{2i\pi x}(e^{-i\pi x} - e^{i\pi x}) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

De plus

$$\mathcal{F}(\varphi)(0) = \int_{-1/2}^{1/2} dt = 1$$

On remarque (puisque $\sin(u) \sim u$ au voisinage de 0) que $\mathcal{F}(\varphi)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

1.B

1.B.1 On sait que sin est DSE de rayon infini et en utilisant le DSE, on trouve que

$$\forall x \neq 0,\ \psi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(\pi x)^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\pi^2)^n}{(2n+1)!} x^{2n}$$

La formule reste valable pour $x = 0$. On a donc trouvé le DSE de ψ et montré que le rayon de convergence est infini.
La somme d'une série entière étant de classe C^∞ sur l'intervalle ouvert de convergence, on a donc

$$\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$$

1.B.2 Soit $n \in \mathbb{N}$; sur $[n, n+1]$, $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{n+1}$. On en déduit que

$$\int_n^{n+1} |\psi(x)|\ dx \geq \frac{1}{\pi(n+1)} \int_n^{n+1} |\sin(\pi x)|\ dx$$

$x \mapsto |\sin(\pi x)|$ étant 1-périodique, l'intégrale ci-dessus est égale à celle sur $[0, 1]$ où la fonction est positive. On peut enlever les valeurs absolue et l'intégrale vaut $\int_0^1 \cos(\pi x)\ dx = \frac{2}{\pi}$. Ainsi,

$$\int_n^{n+1} |\psi(x)|\ dx \geq \frac{2}{\pi^2(n+1)}$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^n |\psi(x)|\ dx \geq \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n \to +\infty}{\to} +\infty$$

$c \mapsto \int_0^c |\psi(x)|\ dx$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et ce qui précède montre que cette fonction n'est pas bornée. Elle est donc de limite infinie en $+\infty$ et ψ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$. En particulier

$$\psi \notin E_{cpm}$$

1.C Il s'agit d'utiliser le théorème de continuité des intégrales à paramètres. Soit donc $f \in E_{cpm}$.
- $\forall x \in \mathbb{R},\ t \mapsto f(t)e^{-2i\pi xt}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- $\forall t \in \mathbb{R},\ x \mapsto f(t)e^{-2i\pi xt}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- $\forall [-a, a] \subset \mathbb{R},\ \forall x \in [-a, a],\ \forall t \in \mathbb{R},\ |f(t)e^{-2i\pi xt}| = |f(t)|$. Le "majorant" est indépendant de x et intégrable sur $\mathbb{R}$.

Le théorème s'applique et donne

$$\mathcal{F}(f) \in C^0(\mathbb{R})$$

1.D Soit $f \in \mathcal{S}$.

1.D.1 Soit $n \in \mathbb{N}$. $x \mapsto x^n f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et les seuls problèmes d'intégrabilité sont aux voisinages des infinis. $x \mapsto x^{n+2} f(x)$ étant bornée sur $\mathbb{R}$, on a $x^n f(x) = O(1/x^2)$ au voisinage des infini ce qui nous donne l'intégrabilité voulue.

1.D.2 On veut maintenant utiliser le théorème de régularité des intégrales à paramètres.
- $\forall x \in \mathbb{R},\ t \mapsto f(t)e^{-2i\pi xt}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in \mathbb{R},\ x \mapsto f(t)e^{-2i\pi xt}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ de dérivée n-ième $x \mapsto (-2i\pi)^n t^n f(t) e^{-2i\pi xt}$.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ t \mapsto (-2i\pi)^n t^n f(t) e^{-2i\pi xt}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall [-a, a] \subset \mathbb{R},\ \forall x \in [-a, a],\ \forall t \in \mathbb{R},\ |(-2i\pi)^n t^n f(t) e^{-2i\pi xt}|| = (2\pi)^n |t^n f(t)|$. Le "majorant" est indépendant de x et intégrable sur $\mathbb{R}$ (on vient de le voir).

Le théorème s'applique et donne $\mathcal{F}(f) \in C^\infty(\mathbb{R})$ avec

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ (\mathcal{F}(f))^{(n)}(x) = (-2i\pi)^n \int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t) e^{-2i\pi x}\ dt$$

1.E

1.E.1 θ est continue et $\theta(x)$ est négligeable devant toute puissance de x au voisinage des infinis par croissances comparées. En particulier pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^n\theta(x)$ est continue et de limite finie (et même nulle) en $\pm\infty$ et donc bornée. Ainsi

$$\theta \in \mathcal{S}$$

La question précédente donne la dérivabilité de $y = \mathcal{F}(\theta)$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y'(x) = (-2i\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-\pi t^2} e^{-2i\pi xt}\, dt$$

On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y'(x) + 2\pi x y(x) = i \int_{-\infty}^{+\infty} (-2\pi t - 2i\pi x) e^{-\pi t^2 - 2i\pi xt}\, dt$$

La fonction (de t) sous l'intégrale est la dérivée de $t \mapsto e^{-\pi t^2 - 2i\pi xt}$ dont la limite en $\pm\infty$ est nulle (son module vaut $\theta(t)$). L'intégrale est donc nulle et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y'(x) + 2\pi x y(x) = 0$$

1.E.2 On résout cette équation différentielle linéaire d"ordre 1. Il existe une constante c telle que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ce^{-\pi x^2}$$

Avec l'intégrale donnée dans l'énoncé, on sait que $y(0) = 1$ et donc que $c = 1$. On a ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = e^{-\pi x^2}$$

ce qui s'écrit, en revenant aux notations de l'énoncé,

$$\mathcal{F}(\theta) = \theta$$

0.2 Formule d'inversion de Fourier

2.A On veut utiliser le théorème de convergence dominée sur $\mathbb{R}$ avec la fonction

$$u_n\ :\ x \mapsto \mathcal{F}(f)(x)\theta\left(\frac{x}{n}\right)$$

- Pour tout n, u_n est continue sur $\mathbb{R}$.
- Comme θ est continue en 0, (u_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $\mathcal{F}(f)$ ($\theta(0) = 1$) et cette limite simple est continue sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout n, $|u_n| \leq |\mathcal{F}(f)|$ ($|\theta|$ est majorée par 1) et le majorant est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Le théorème s'applique et indique que

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(x)\, dx$$

2.B On veut utiliser le théorème de convergence dominée sur $\mathbb{R}$ avec la fonction

$$v_n\ :\ t \mapsto \mathcal{F}(\theta)(t) f\left(\frac{t}{n}\right) = \theta(t) f\left(\frac{t}{n}\right)$$

- Pour tout n, v_n est continue sur $\mathbb{R}$.
- Comme f est continue en 0, (v_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $f(0)\theta$ et cette limite simple est continue sur $\mathbb{R}$.
- f étant dans $\mathcal{S}$, elle est bornée sur $\mathbb{R}$ ($f(t) = t^0 f(t)$). Pour tout n, $|v_n| \leq \|f\|_\infty \theta$ et le majorant est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Le théorème s'applique et indique que

$$\lim_{n\to+\infty} J_n = f(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t)\, dt = f(0)$$

2.C En revenant à la définition de $\mathcal{F}(f)$, on a

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi xt} \theta\left(\frac{x}{n}\right)\, dt \right) dx$$

La formule de Fubini donne alors

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi xt} \theta\left(\frac{x}{n}\right)\, dx \right) dt$$

Dans l'intégrale interne, on effectue le changement de variable linéaire $u = x/n$ pour obtenir

$$I_n = n \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2in\pi ut} \theta(u)\, du \right) dt$$

Dans l'intégrale extérieure, on effectue le changement de variable linéaire $v = nt$ pour obtenir

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{t}{n}\right) e^{-2i\pi ut} \theta(u)\, du \right) dt$$

$f(t/n)$ ne dépendant pas de u, on peut le sortir par linéarité du passage à l'intégrale. On reconnaît alors $\mathcal{F}(\theta)(u)$ et on conclut que

$$I_n = J_n$$

2.D Il suffit de combiner les trois questions qui précèdent et l'unicité de la limite pour conclure que

$$f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(x)\, dx$$

Fixons $x \in \mathbb{R}$ et posons $h \;\; t \mapsto f(x+t)$. h est continue, comme f. De plus, pour $|t|$ assez grand,

$$t^n h(t) = \frac{t^n}{(x+t)^n}(x+t)^n f(x+t) \underset{t \to \pm\infty}{\sim} (x+t)^n f(x+t)$$

ce qui montre que $t \mapsto t^n h(t)$ est bornée, comme f, aux voisinages des infinis et donc sur $\mathbb{R}$ (puisque continue et donc bornée sur tout segment). On peut alors appliquer ce qui précède à h et affirmer que

$$f(x) = h(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(h)(y)\, dy$$

On remarque alors, avec le changement de variable affine $u = x + t$, que

$$\mathcal{F}(h)(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t) e^{-2i\pi ty}\, dt = e^{2i\pi yx} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-2i\pi uy}\, du = e^{2i\pi yx} \mathcal{F}(f)(y)$$

On a ainsi montré que

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi yx} \mathcal{F}(f)(y)\, dy$$

2.E La fonction $x \mapsto \frac{1}{2} e^{-|x|}$ est dans $\mathcal{S}$ (elle est continue sur $\mathbb{R}$ et dominée au voisinage de $\pm\infty$ par toute puissance de x par croissances comparées). De plus

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathcal{F}(f)(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t| - 2\pi i t x}\, dt$$

Pour calculer l'intégrale, on découpe en deux par Chasles :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f)(x) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{0} e^{t(1-2\pi i x)}\, dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{0} e^{t(-1-2\pi i x)}\, dt \\
&= \frac{1}{2} \left(\left[\frac{1}{1-2\pi i x} e^{t(1-2\pi i x)} \right]_{t=-\infty}^{t=0} - \left[\frac{1}{1+2\pi i x} e^{t(-1-2\pi i x)} \right]_{t=0}^{t=+\infty} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-2\pi i x} + \frac{1}{1+2\pi i x} \right) \\
&= \frac{1}{1+4\pi^2 x^2}
\end{aligned}$$

On a donc avec la question précédente

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{1}{2}e^{-|x|} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2i\pi yx}}{1+(2\pi y)^2}\ dy$$

0.3 Transformée de Fourier à support compact

3.A D'après 1.D, $\mathcal{F}(f) \in C^\infty(\mathbb{R})$ (puisque $f \in \mathcal{S}$). De plus $\mathcal{F}(f)$ est nulle en dehors d'un segment et donc dominée par toute puissance de x au voisinage des infinis. On a donc $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{S}$.
En reprenant la même démarche qu'en 1.D.2 (changer x en $-x$), la formule (2.1) de la question 2.D montre que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = \int_{-1/2}^{1/2} (2i\pi t)^n \mathcal{F}(f)(t) e^{2i\pi tx}\ dt$$

3.B Si h est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ alors pour tout entier n et tous $a, b \in \mathbb{R}$ (formule de Taylor avec reste intégrale)

$$h(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} h^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} h^{(n+1)}(t)\ dt$$

On applique ceci avec f pour $b = x$ et $a = x_0$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ dt$$

Montrons que ce terme est de limite nulle quand $n \to +\infty$. Pour cela, on le majore en module ; une majoration grossière donne

$$\left| \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ dt \right| \le \frac{|x-x_0|^{n+1}}{n!} \|f^{(n+1)}\|_{\infty,[x,x_0]}$$

Remarquons que ($\mathcal{F}(f)$ est bornée sur $\mathbb{R}$ puisque continue et nulle en dehors d'un segment)

$$\forall y \in \mathbb{R},\ |f^{(n)}(y)| \le |\pi y|^n \int_{-1/2}^{1/2} |2t|^n |\mathcal{F}(f)(t)|\ dt \le |\pi y|^n \|\mathcal{F}(f)\|_\infty$$

On a donc

$$\|f^{(n)}\|_{\infty,[x,x_0]} \le |\pi \max(|x|, |x_0|)|^n \|\mathcal{F}(f)\|_\infty$$

et ainsi

$$\left| \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ dt \right| \le \frac{|\pi \max(|x|, |x_0|)(x-x_0)|^{n+1}}{n!} \|\mathcal{F}(f)\|_\infty$$

Par croissances comparées des fonctions exponentielle et factorielle, ce terme tend vers 0 quand $n \to +\infty$. On peut ainsi passer à la limite et affirmer que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0)$$

En reprenant l'expression des dérivées de f, on trouve

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!} \int_{-1/2}^{1/2} (2i\pi t)^k \mathcal{F}(f)(t) e^{2i\pi tx_0}\ dt$$

3.C Supposons f nulle sur un intervalle $]x_0 - r, x_0 + r[$ avec $r > 0$. On a alors

$$\forall x \in]-r, r[,\ 0 = f(x_0 + x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \int_{-1/2}^{1/2} (2i\pi t)^k \mathcal{F}(f)(t) e^{2i\pi tx_0}\ dt$$

Comme $r > 0$, l'unicité du DSE de la fonction nulle donne la nullité de $\int_{-1/2}^{1/2} (2i\pi t)^k \mathcal{F}(f)(t) e^{2i\pi tx_0}\ dt$ pour tout n. La question précédente donne alors la nullité de f sur $\mathbb{R}$.
On vient de voir que f ne peut être nulle sur un segment $[u, v]$ avec $u < v$. A fortiori, elle ne peut être nulle en dehors d'un intervalle $[a, b]$.

0.4 Cas de fonctions périodiques

4.A

4.A.1 Par théorèmes généraux, g est de classe C^∞ sur $]-1,1[\setminus\{0\}$ (quotient de deux telles fonctions avec le dénominateur qui ne s'annule pas). De plus

$$\forall x \in]-1,1[\setminus\{0\},\ g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x}\frac{x}{\sin(\pi x)} \sim_0 \frac{1}{\pi}\frac{f(x)-f(0)}{x} \underset{x\to 0}{\to} \frac{f'(0)}{\pi} = g(0)$$

ce qui montre que g est continue en 0.

4.A.2 On a

$$\forall x \in]-1,1[\setminus\{0\},\ g'(x) = \frac{f'(x)\sin(\pi x) - \pi\cos(\pi x)(f(x)-f(0))}{\sin^2(\pi x)}$$

Par formule de Taylor-Young, $f'(x) = f'(0)+xf''(0)+o(x)$ et $f(x)-f(0) = xf'(0)+\frac{x^2}{2}f''(0)+o(x^2)$ (au voisinage de 0). En utilisant en outre $\sin(\pi x) = \pi x + o(x^2)$ et $\cos(\pi x) = 1+o(x)$, on trouve alors

$$f'(x)\sin(\pi x) - \pi\cos(\pi x)(f(x)-f(0)) = \frac{\pi f''(0)}{2}x^2 + o(x^2)$$

Comme $\sin^2(\pi x) \sim \pi^2 x^2$, on trouve que

$$\lim_{x\to 0} g'(x) = \frac{f''(0)}{2\pi}$$

On est alors (avec la question précédente) dans le cadre d'utilisation du théorème de la limite de la dérivée qui nous apprend que g est dérivable en 0 avec $g'(0) = \frac{f''(0)}{2\pi}$ et que g' est continue en 0. On a ainsi

$$g \in C^1(]-1,1[) \text{ et } g'(0) = \frac{f''(0)}{2\pi}$$

4.B Si $k \neq 0$, une primitive de $x \mapsto e^{2i\pi kx}$ est $x \mapsto \frac{1}{2i\pi k}e^{2i\pi kx}$. Cette primitive étant 1 périodique, l'intégrale de $e^{2i\pi kx}$ est nulle sur un intervalle de longueur 1. On a alors, par linéarité du passage à l'intégrale,

$$\int_{-1/2}^{1/2} S_n(x)\,dx = \int_{-1/2}^{1/2} dx = 1$$

4.C On remarque que

$$S_n(x) = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=-n}^{n} (e^{2i\pi x})^k\right)$$

Pour $x \in [-1/2,1/2]\setminus\{0\}$ on a une somme géométrique de raison $e^{2i\pi x} \neq 1$ et (factorisation par la demi-somme des angles et formule d'Euler)

$$S_n(x) = \mathrm{Im}\left(\frac{e^{-2i\pi nx} - e^{2i\pi(n+1)x}}{1-e^{2i\pi x}}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{-2i\sin((2n+1)\pi x)}{-2i\sin(\pi x)}\right) = \frac{\sin((2n+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}$$

4.D Par linéarité du passage à l'intégrale, on a

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k(f) = \int_{-1/2}^{1/2} f(x)\sum_{k=-n}^{n} e^{-2i\pi kx}\,dx = \int_{-1/2}^{1/2} f(x)S_n(-x)\,dx = \int_{-1/2}^{1/2} f(x)\frac{\sin((2n+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}\,dx$$

Avec la définition de g, ceci donne

$$\begin{aligned}\sum_{k=-n}^{n} c_k(f) &= \int_{-1/2}^{1/2}\left(g(x)+\frac{f(0)}{\sin(\pi x)}\right)\sin((2n+1)\pi x)\,dx\\ &= \int_{-1/2}^{1/2} g(x)\sin((2n+1)\pi x)\,dx + f(0)\int_{-1/2}^{1/2} S_n(x)\,dx\\ &= \int_{-1/2}^{1/2} g(x)\sin((2n+1)\pi x)\,dx + f(0)\end{aligned}$$

4.E g étant de classe C^1 sur $[-1/2,1/2]$, on peut intégrer par parties :

$$\int_{-1/2}^{1/2} g(x)\sin((2n{+}1)\pi x)\,dx = \left[-\frac{\cos((2n+1)\pi x)}{(2n+1)\pi}g(x)\right]_{-1/2}^{1/2} + \frac{1}{(2n+1)\pi}\int_{-1/2}^{1/2} g'(x)\cos((2n{+}1)\pi x)\,dx$$

Avec le cosinus, le terme "tout intégré" est nul. g' étant continue sur le segment $[-1/2,1/2]$, on peut alors majorer grossièrement :

$$\left|\int_{-1/2}^{1/2} g(x)\sin((2n+1)\pi x)\,dx\right| \leq \frac{\|g'\|_{\infty,[-1/2,1/2]}}{(2n+1)\pi} = \frac{C}{2n+1} \quad \text{avec} \quad C = \frac{\|g'\|_{\infty,[-1/2,1/2]}}{\pi}$$

4.F Fixons x et t dans $[-1/2,1/2]$. Par égalité des accroissements finis, il existe $c_{x,t} \in [t, x+t]$ tel que $f(x+t) - f(t) = xf'(c_{x,t})$. On peut alors écrire que

$$G_t(x) = (f'(x+t) - f'(c_{x,t}))\sin(\pi x) + f'(c_{x,t})(\sin(\pi x) - x\pi\cos(\pi x))$$

Remarquons que chaque dérivée de f est bornée sur $\mathbb{R}$ puisque continue et périodique.

- Par inégalité des accroissements finis, on a

$$|f'(x+t) - f'(c_{x,t})| \leq |x+t-c_{x,t}|\|f''\|_\infty \leq |x|\|f''\|_\infty$$

- De même

$$|\sin(\pi x)| = |\sin(\pi x) - \sin(0)\| \leq |\pi x|$$

- $\|f'(c_{x,t})| \leq \|f'\|_\infty$.
- $\sin(\pi x) - x\pi\cos(\pi x) = (\pi x + o(x^2)) - x\pi(1+o(x)) = o(x^2)$. $\frac{\sin(\pi x)-x\pi\cos(\pi x)}{x^2}$ est donc prolongeable par continuité en 0 et est bornée sur le segment $[-1/2,1/2]$;

$$\exists\, c/\ \forall x \in [-1/2,1/2],\ |\sin(\pi x) - x\pi\cos(\pi x)| \leq cx^2$$

On en déduit que

$$|G_t(x)| \leq (\pi\|f''\|_\infty + c\|f'\|_\infty)x^2 = Dx^2$$

D étant indépendante de x et t.

4.G Fixons $t \in [-1/2,1/2]$. La fonction $h_t\ :\ x \mapsto f(x+t)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et 2π périodique et on peut lui appliquer la question 4.D. En posant $g_t(x) = \frac{h_t(x)-h_t(0)}{\sin(\pi x)}$ pour $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$, $g_t(0) = \frac{h_t'(0)}{\pi}$ et $g_t(1) = g_t(-1) = -g_t(0)$ on a alors

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k(h_t) = h_t(0) + \int_{-1/2}^{1/2} g_t(x)\sin((2n+1)\pi x)\,dx$$

Compte-tenu de l'expression de h_t, on a (changement de variable affine $u = x+t$)

$$c_n(h_t) = \int_{-1/2}^{1/2} f(x+t)e^{-2\pi inx}\,dx = e^{2\pi int}\int_{t-1/2}^{t+1/2} f(u)e^{-2\pi inu}\,du$$

Comme l'intégrale d'une fonction périodique est la même sur tout segment de longueur la période, on trouve que $c_n(h_t) = e^{2\pi int}c_n(f)$ et ainsi

$$f(t) - \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{2i\pi kt} = -\int_{-1/2}^{1/2} g_t(x)\sin((2n+1)\pi x)\,dx$$

Avec la question 4.E, on trouve alors que

$$\left|f(t) - \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{2i\pi kt}\right| \leq \frac{\|g_t'\|_{\infty,[-1/2,1/2]}}{\pi}\frac{1}{2n+1}$$

Remarquons maintenant qu'avec la question précédente,

$$|g_t'(x)| = \frac{|G_t(x)|}{\sin^2(\pi x)} \leq D\frac{x^2}{\sin^2(\pi x)}$$

$x \mapsto \frac{x^2}{\sin^2(\pi x)}$ est continue sur $[-1/2, 1/2] \setminus \{0\}$ et prolongeable par continuité en 0 (valeur $1/\pi^2$). C'est donc une fonction bornée sur le segment. Notons M sa norme infinie. On a alors $\|g'\|_{\infty,[-1/2,1/2]} \leq M$ et enfin

$$\left| f(t) - \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{2i\pi kt} \right| \leq \frac{DM}{\pi}\frac{1}{2n+1} = \frac{E}{2n+1}$$

où E est une constante (indépendante de x et t).

BONUS suite du sujet :

0.5 Formule d'échantillonage de Shannon

Soit $f \in \mathcal{S}$ dont la transformée de Fourier $\mathcal{F}(f)$ est nulle en dehors du segment $[-1/2, 1/2]$. on pose

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \psi_k(x) = \psi(x+k) \tag{5.1}$$

où ψ est définie à la question 1.B.

5.A Justifier que $\forall n \in \mathbb{N},\ (\mathcal{F}(f))^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right) = (\mathcal{F}(f))^{(n)}\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$.

5.B Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$, qui est 1-périodique et qui vaut $\mathcal{F}(f)$ sur l'intervalle $[-1/2, 1/2]$. Montrer que h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

5.C A l'aide de l'inégalité (4.1), prouver l'existence d'une suite de nombres complexes $(d_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ telle que la suite de fonctions $\left(x \mapsto \sum_{k=-n}^{n} d_k e^{2\pi ikx}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\mathcal{F}(f)$ sur $[-1/2, 1/2]$.

5.D Démontrer que la suite de fonctions $\left(\sum_{k=-n}^{n} d_k \psi_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.
On notera symboliquement $f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k \psi_k$.

5.E Etablir que $\forall j \in \mathbb{Z},\ f(-j) = d_j$.
L'égalité $f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(-k)\psi_k$ traduit la reconstruction du signal f à partir de l'échantillon $(f(k))_{k\in\mathbb{Z}}$.

BONUS une correction :

0.6 Formule d'échantillonage de Shannon

5.A $\mathcal{F}(f)$ étant nulle hors de $[-1/2, 1/2]$, ses dérivées à tout ordre à droite en $1/2$ et à gauche en $-1/2$ sont nulles. Comme c'est une fonction C^∞, on a donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (\mathcal{F}(f))^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right) = (\mathcal{F}(f))^{(n)}\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

5.B h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en tout point de l'ouvert $]-1/2, 1/2[$ (si x_0 est dans cet ouvert, il existe un voisinage de x_0 sur leque $h = \mathcal{F}(f)$ qui est C^∞). Par périodicité, elle est indéfiniment en tout point hors de $1/2 + \mathbb{Z}$.
Par périodicité, il suffit de montrer que h est indéfiniment dérivable à gauche en $1/2$ et à droite en $-1/2$ avec égalité des dérivées à tout ordre à droite et gauche en $-1/2$ et $1/2$. C'est ce que l'on a fait en question précédente.

5.C On peut ainsi appliquer l'identité (4.1) à h. En posant $d_k = c_k(h)$, on trouve que

$$\left\| h - \sum_{k=-n}^{n} d_k e_k \right\|_{\infty,[-1/2,1/2]} \leq \frac{E}{2n+1} \quad \text{avec} \quad e_k\ :\ t \mapsto e^{2ik\pi t}$$

ce qui prouve la convergence uniforme voulue sur $[-1/2, 1/2]$ (où h coïncide avec $\mathcal{F}(f)$).

5.D Si $x \notin k$, on a $\int_{-1/2}^{1/2} e^{2i\pi(x+k)\xi}\, d\xi = \frac{1}{2i\pi(x+k)}(e^{i\pi(x+k)} - e^{-i\pi(x+k)}) = \psi(x+k) = \psi_k(x)$. Ceci reste vrai pour $x = k$ (l'égalité se lit).
La formule (2.1) donne

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_{-1/2}^{1/2} h(\xi) e^{2i\pi x\xi}\, d\xi$$

et on a donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - \sum_{k=-n}^{n} d_k \psi_k(x) = \int_{-1/2}^{1/2} \left(h(\xi) - \sum_{k=-n}^{n} d_k e^{2i\pi k\xi} \right) e^{2i\pi x\xi}\, d\xi$$

Une majoration grossière donne (l'exponentielle complexe est de module 1 et on intègre sur un intervalle de longueur 1)

$$\left\| f - \sum_{k=-n}^{n} d_k \psi_k \right\|_{\infty,\mathbb{R}} \leq \left\| h - \sum_{k=-n}^{n} d_k e_k \right\|_{\infty,[-1/2,1/2]}$$

et on a la convergence uniforme voulue.

5.E La convergence uniforme entraînant la convergence simple, on a

$$\forall j \in \mathbb{Z},\ f(-j) = \sum_{k=-n}^{n} d_k \psi_k(-j) = d_j$$

puisque $\psi_k(-j) = \psi(k-j)$ vaut 1 si $k = j$ et est nul sinon.