DS 6

Vendredi 23 janvier 2020
L'usage des calculatrices n'est pas autorisé

Vous attacherez la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction, même si tout résultat qui n'est pas explicitement dans le cours de MPSI ou de MP doit être démontré. Si vous repèrez ce qui semble être une erreur d'énoncé, signalez le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.

Consignes à respecter sous peine d'être pénalisé :

• Faire clairement apparaître le numéro (et le cas échéant la partie) de la question traitée.

• Faire apparaître toutes les étapes **importantes** d'un calcul et la propriété/définition/caractérisation utilisée pour passer à la ligne suivante.

• Souligner les résultats intermédiaires dans une démonstration à tiroirs.

• Faire une phrase de conclusion répondant clairement à la/les question(s) posées, et encadrer le résultat.

• Ne pas utiliser de stylo plume ou stylo à friction ni effaceur ou blanco.

Questions de cours :

Énoncer les théorèmes suivants :

1. Théorème de comparaison séries/intégrales.

2. Théorème d'intégration terme à terme de Beppo Levi.

3. Théorème de convergence dominée.

4. Théorème de continuité des intégrales à paramètres.

5. Rappeler la formule du produit de Cauchy avec ses hypothèses.

6. En déduire le développement en série entière de $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ pour $x \in]-1,1[$.

Exercice 1

On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$.

On considère la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$.

1. Étudier la convergence simple de cette série.

On note D l'ensemble des x où cette série converge et $S(x)$ la somme de cette série pour $x \in D$.

2. **a.** Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur D.

b. La fonction S est-elle continue sur D ?

Exercice 2

1. On considère la famille $a_{p,q} = \dfrac{1}{(p+q+1)2^{p+q}}$ pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$.

Calculer pour tout entier naturel n la somme $S_n = \sum_{p+q=n} a_{p,q}$.

2. Montrer que la série double des $a_{p,q}$ est convergente et calculer sa somme.

Exercice 3

On considère les fonctions F et G définies par :

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+4n^2x^2} \text{ et } G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^{2xt}-1} dt.$$

1. Pour un réel $x > 0$, justifier la convergence de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+4t^2x^2} dt$$

puis calculer la valeur de cette intégrale (on pourra utiliser le changement de variable $u = 2xt$).

2. Démontrer que F est définie sur $\mathbb{R}^*$ et étudier la parité de F.

3. Soient a et b des réels avec $0 < a < b$. Démontrer que F est de classe C^1 sur $]a, b[$.

Que peut-on en déduire ?

4. Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'inégalité

$$\frac{1}{1+4n^2x^2} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{1}{1+4t^2x^2} dt$$

puis établir que $F(x) \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+4t^2x^2} dt$.

5. Pour $x > 0$, démontrer de même l'inégalité $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+4t^2x^2} dt \leqslant F(x) + 1$.

6. En déduire un équivalent de $F(x)$ lorsque $x \to 0^+$ et la limite de $F(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

7. Démontrer que G est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

8. Démontrer que G est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

9. Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, établir la convergence de l'intégrale :

$$I_\alpha = \int_0^{+\infty} \sin(t) e^{-\alpha t} dt$$

et calculer sa valeur.

10. Démontrer que pour tout $t > 0$ et tout $x > 0$,

$$\frac{\sin t}{e^{2xt}-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(t) e^{-2nxt}.$$

11. En déduire une relation entre F et G (on justifiera soigneusement cette égalité).

Exercice 4

Pour tout réel $x > 0$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\,dt$.

1. Démontrer que l'application F est bien définie sur $[0, +\infty[$ et qu'elle y est continue.
2. Montrer que l'application F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, et préciser sa dérivée sous forme d'une intégrale.
3. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} F(x)$. On pourra considérer une suite de réels (x_n) qui tend vers $+\infty$ et on calculera $\lim_{n\to+\infty} F(x_n)$ en justifiant très clairement le raisonnement.

   Dresser le tableau de variations de F en précisant ses limites aux bornes.
4. On note $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ (la valeur de I sera obtenu à la fin de l'exercice).

   Démonter que pour tout $x > 0$,
   $$F(x) - F'(x) = \frac{I}{\sqrt{x}}.$$
   On ne cherchera pas à résoudre cette équation différentielle !
5. On considère la fonction G définie pour $x \geqslant 0$ par $G(x) = e^{-x}F(x)$.

   a. Déterminer pour $x > 0$ la valeur de $G'(x)$ en fonction de I et de x. En déduire que pour tout $x > 0$,
   $$G(x) - G(0) = -I \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt.$$
   On commencera par justifier que la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0, x]$.

   b. À l'aide d'un changement de variable dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt$, en déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

TOURNER LA PAGE S.V.P.

Exercice 5

Dans ce sujet, on étudie des séries de fonctions de la forme : $x \mapsto \sum_{n \geqslant 1} a_n \dfrac{x^n}{1-x^n}$.

pour des suites réelles $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

1. Soit $x \in]-1,1[$, donner un équivalent de $1-x^n$ pour n au voisinage de $+\infty$.

Démontrer que pour tout $x \in]-1,1[$, la série $\sum \dfrac{x^n}{1-x^n}$ converge absolument.

2. On note $A = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

a. Lorsque la série double des $(u_{n,q})_{(n,q) \in A}$ est absolument convergente, justifier que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{q=1}^{+\infty} u_{n,q} \right) = \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\sum_{(n,q) \in I_p} u_{n,q} \right) \text{ où } I_p = \{(n,q) \in A, nq = p\}.$$

b. Démontrer que pour tout $x \in]-1,1[$, la série double des $(a_n x^{nq})_{(n,q) \in A}$ est convergente.

c. Rappeler le développement en série entière de $\dfrac{y}{1-y}$ pour $y \in]-1,1[$.

d. En déduire que pour tout $x \in]-1,1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \dfrac{x^n}{1-x^n} = \sum_{p=1}^{+\infty} b_p x^p$ où $b_p = \sum_{d|p} a_d$.

$(d|n$ signifiant d divise $n)$.

3. Dans cette question, pour $n \geqslant 1$, on pose $a_n = 1$ et on note d_n le nombre de diviseurs de n.

a. En déduire que pour $x \in]-1,1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{p=1}^{+\infty} d_p x^p.$$

4. Dans cette question, pour $n \geqslant 1$, on pose $a_n = \varphi(n)$ où n est le nombre d'entiers naturels premiers à n et inférieurs à n.

Justifier que pout tout $x \in]-1,1[$ la série $\sum a_n x^n$ est absolument convergente.

On admet que pour tout entier naturel $p \geqslant 1$, $p = \sum_{n|p} \varphi(n)$. Vérifier ce résultat pour $p = 12$.

a. Montrer que pour $x \in]-1,1[$,

$$\sum_{p=1}^{+\infty} p x^p = \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n) \frac{x^n}{1-x^n}.$$

b. Pour $x \in]-1,1[$, exprimer $\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n) \dfrac{x^n}{1-x^n}$ sous forme d'un quotient de deux polynômes.

5. En utilisant le théorème de la double limite, établir à l'aide du développement en série entière de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ sur l'intervalle $]-1,1[$, la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$.

6. Dans cette question et la suivante, pour $n \geqslant 1$, $a_n = (-1)^n$ et pour tout $x \in]-1,1[$,
$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \dfrac{x^n}{1-x^n}$.

En utilisant le théorème de la double limite calculer $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x}$ et donner un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0.

Que peut-on en déduire ?

7. Démontrer qu'au voisinage de 1, $f(x) \sim \dfrac{-\ln 2}{1-x}$.

On pourra remarquer que pour $x \in]0,1[$, $\dfrac{1-x}{1-x^n} = \dfrac{1}{1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}}$.