PROBLEME

1. **Etude de** $M_n(f)$.
   (a) $\phi : t \to t^n e^{-\alpha t}$ vérifie $\phi'(t) = t^{n-1}e^{-\alpha t}(n - \alpha t)$ et ϕ donc atteint son maximum sur $\mathbb{R}_+$ en $t = \frac{n}{\alpha}$, qui vaut $e^{-n}(\frac{n}{\alpha})^n$. de plus $\lim_{t\to+\infty} \phi(t) = 0$ et $\phi(0) = 0$

   (b) Soit $t > 0$ $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha > 0$.La fonction $t \to t^n f(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.

$$|t^n f(t)| = e^{\alpha t} |f(t)| \phi(t) \leqslant e^{-n}(\frac{n}{\alpha})^n e^{\alpha t} |f(t)|$$

   Or la fonction $e^{\alpha t} |f(t)|$ est intégrable ce qui assure l'intégrabilité de la fonction $t^n f(t)$ sur $[0, +\infty[$
   On pose $\gamma = \int_0^{+\infty} |f(t)| e^{\alpha t} dt$.

$$\begin{aligned} |M_n(f)| &\leqslant \int_0^{+\infty} |f(t)| t^n dt = \int_0^{+\infty} \left|f(t)e^{-\alpha t}\right| e^{at} t^n dt \\ &\leqslant e^{-n}(\frac{n}{\alpha})^n \int_0^{+\infty} \left|f(t)e^{-\alpha t}\right| dt = \gamma e^{-n}(\frac{n}{\alpha})^n \end{aligned}$$

2. **Continuité et dérivabilité de la fonction** $T(f)$
   (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. $\left|e^{itx}f(t)\right| = |f(t)|$ qui est intégrable sur $[0, +\infty[$ donc $Tf(x) = \int_0^{+\infty} e^{itx} f(t)dt$ existe. On a de plus $\left|\int_0^{+\infty} e^{itx} f(t)dt\right| \leqslant \int_0^{+\infty} |f(t)| dt$ donc Tf est bornée sur $\mathbb{R}$ par $M_0(f)$. Posons $g(t, x) = e^{itx} f(t)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,l'application $t \to g(x, t)$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ et pour tout $t \geqslant 0$, l'application $x \to g(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. On a de plus pour tous $t \geqslant 0$ et $x \in \mathbb{R}$, $|g(x, t)| \leqslant |f(t)|$ qui est intégrable sur $[0, +\infty[$ Donc Tf est continue sur $\mathbb{R}$.

   (b) $\frac{\delta g}{\delta x}(x, t) = ite^{itx} f(t)$. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$,l'application $t \to ite^{itx} f(t)$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ et pour tout $t \geqslant 0$, l'application $x \to ite^{itx} f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. On a de plus pour tous $t \geqslant 0$ et $x \in \mathbb{R}$, $|g(x, t)| = |tf(t)|$ qui est intégrable sur $[0, +\infty[$ et indépendante de x. Donc Tf est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et pour tout entier $p \geqslant 0$, $(Tf)'(x) = \int_0^{+\infty} ite^{itx} f(t)dt$

   (c) pour tout entier naturel p, $\frac{\delta^p g}{\delta x^p}(x, t) = e^{itx}(it)^p f(t)$. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$,l'application $t \to e^{itx}(it)^p f(t)$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ et pour tout $t \geqslant 0$, l'application $x \to e^{itx}(it)^p f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. On a de plus pour tous $t \geqslant 0$ et $x \in \mathbb{R}$, $|g(x, t)| = |t^p f(t)|$ qui est intégrable sur $[0, +\infty[$ et indépendante de x. Donc Tf est de classe C^p sur $\mathbb{R}$ et pour tout entier $p \geqslant 0$, $(Tf)^{(p)}(x) = \int_0^{+\infty} e^{itx}(it)^p f(t)dt$
   Donc

$$[T(f)]^{(p)}(0) = \int_0^{+\infty} (it)^p f(t)dt = i^p M_p(f)$$

   Notons pour la suite que $(T(f))^{(p)}$ est bornée et $\left|(Tf)^{(p)}(x)\right| \leqslant \int_0^{+\infty} t^p f(t)dt = M_p(f)$

3. **Développement en série entière de** Tf
   (a) pour tout $n \in \mathbb{N}$ et x tel que $|x| < \alpha$,

$$\left|\frac{i^n M_n(f)}{n!} x^n\right| \leqslant \gamma e^{-n}(\frac{n}{\alpha})^n \frac{|x^n|}{n!}$$

On a

$$\gamma e^{-n}(\frac{n}{\alpha})^n\frac{|x^n|}{n!}\sim\gamma e^{-n}(\frac{n}{\alpha})^n\frac{|x^n|}{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n}=\gamma\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\left|\frac{x}{\alpha}\right|^n.$$

On en déduit que si $|x|<\alpha$, la série $(\sum\gamma e^{-n}(\frac{n}{\alpha})^n\frac{|x^n|}{n!})$ est convergente et donc la série $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{i^nM_n(f)}{n!}x^n$ converge.

(b)

$$T(f)(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{Tf^{(k)}(0)}{k!}x^n+\frac{1}{n!}\int_0^x(x-t)^nT(f)^{(n+1)}(t)dt.$$

et de plus $\frac{Tf^{(n)}(0)}{n!}=\frac{i^nM_n(f)}{n!}$

(c) En particulier d'après l'inégalité de Taylor Lagrange,

$$\left|T(f)(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{Tf^{(k)}(0)}{k!}x^n\right|\leqslant\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\sup(\left|T(f)^{n+1}(t)\right|,t\in[0,x])$$

or d'après ce qui précède

$$\sup(\left|T(f)^{n+1}(t)\right|,t\in[0,x])\leq|M_{n+1}(f)|$$

donc

$$\left|T(f)(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{Tf^{(k)}(0)}{k!}x^n\right|\leqslant\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}|M_{n+1}(f)|$$

Posons $u_n=\frac{|x|^n}{(n)!}|M_n(f)|$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Montrons que $\lim u_n=0$ lorsque $|x|\leq\alpha$

$$u_n=\left|\frac{M_n(f)}{n!}x^n\right|\leqslant\gamma e^{-n}(\frac{n}{\alpha})^n\frac{|x^n|}{n!}=v_n$$

On a

$$v_n=\gamma e^{-n}(\frac{n}{\alpha})^n\frac{|x^n|}{n!}\sim\gamma e^{-n}(\frac{n}{\alpha})^n\frac{|x^n|}{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n}=\gamma\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\left|\frac{x}{\alpha}\right|^n\leq\gamma\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$$

donc $\lim v_n=0$ et donc $\lim u_n=0$

On en déduit que si $|x|\leq\alpha$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{Tf^{(n)}(0)}{n!}x^n$ converge et sa somme est égale à $T(f)(x)$

4. **Limite en $\pm\infty$ de Tf dans un cas particulier**

On suppose que f est de classe C^1 sur I et que $D(f)$ appartient à E_α(ainsi que f)

(a) On a que $f(t)=f(0)+\int_0^t f'(u)du$ donc puisque f' est intégrable, $\lim_{t\to\infty}f(t)=f(0)+\int_0^{+\infty}f'(u)du=L\in\mathbb{R}$ .Or f est elle aussi intégrable sur $[0,+\infty[$, et on sait que si $L\neq0$, f n'est pas intégrable d'après le cours. donc $L=0$

(b) Pour tout réel x

$$\begin{aligned}T(f')(x)&=\int_0^{+\infty}e^{itx}f'(t)dt=\lim_{A\to+\infty}([f(t)e^{itx}]_0^A-\int_0^A ixf(t)e^{itx}dt)\\&=-f(0)-ixTf(x)\end{aligned}$$

(c) En particulier si $x\neq0, Tf(x)=\frac{-f(0)-T(f')(x)}{ix}$, mais on a vu que $T(f')$ est bornée donc

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-f(0)-T(f')(x)}{ix}=0$$

5. **Etude d'un exemple**

Dans cette question , $f(t)=e^{-t^2}$.

(a) On remarque que $t^2f(t)e^{\alpha t}=e^{-t^2+\alpha t+2\ln(t)}\underset{t\to+\infty}{\to}0$ car

$$-t^2+\alpha t+2\ln(t)\sim_{t\to+\infty}-t^2$$

donc $f(t)e^{\alpha t}=o(\frac{1}{t^2})$, ce qui prouve que $f\in E_\alpha$ pour tout réel α.

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} M_{2n}(f) &= \int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-t^2} dt \underset{u=t^2}{=} \int_0^{+\infty} u^n e^{-u} \frac{du}{2\sqrt{u}} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} u^{n-\frac{1}{2}} e^{-u} du = \frac{1}{2}\Gamma(n+\frac{1}{2}) \end{aligned}$$

(ii) On sait que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ donc

$$M_{2n}(f) = \frac{1}{2}\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(n-\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n-1}{2}) = \frac{1}{2}(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})...\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})$$

On en déduit que

$$M_{2n}(f) = \frac{1}{2}\prod_{k=0}^{n-1}(k+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})$$

il y avait une erreur dans le texte

(iii) On admet que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} t^{-1/2} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} u^{-1} e^{-u^2}(2udu) = \sqrt{\pi}$$

Donc

$$M_{2n}(f) = \frac{1}{2}\prod_{k=0}^{n-1}(k+\frac{1}{2})\sqrt{\pi} = \frac{(2n-1)(2n-3)....(1)}{2^{n+1}}\sqrt{\pi} = \frac{(2n)!}{2n(2n-2)...(2).2^{n+1}}\sqrt{\pi} = \frac{(2n)!}{2^{2n+1}n!}\sqrt{\pi}$$

En particulier

$$Tf(x) = \int_0^{+\infty} e^{itx} e^{-t^2} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n M_n(f)}{n!} x^n$$

donc en prenant la partie réelle

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \cos(tx) e^{-t^2} dt &= \mathrm{Re} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n M_n(f)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n M_{2n}(f)}{2n!} x^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n+1}n!}\sqrt{\pi}}{(2n)!} x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{\pi}}{2^{2n+1}n!} x^{2n} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(\frac{-x^2}{4})^n = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{x^2}{4}} \end{aligned}$$