Devoir surveillé 6

Vendredi 25 janvier 2019

L'usage des calculatrices n'est pas autorisé

Vous attacherez la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction, même si tout résultat qui n'est pas explicitement dans le cours de MPSI ou de MP doit être démontré. Si vous repèrez ce qui semble être une erreur d'énoncé, signalez le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.

Consignes à respecter sous peine d'être pénalisé :

- Utiliser des copies doubles.
- Changer de feuille/copie à chaque exercice ou partie d'un problème.
- Faire clairement apparaître le numéro (et le cas échéant la partie) de la question traitée.
- Souligner les résultats intermédiaires dans une démonstration à tiroirs.
- Faire une phrase de conclusion répondant clairement à la question posée, et encadrer le résultat.

Problème 1 : Permutation limite-intégrale et intégrales de Gauss

On considère l'intégrale de Gauss $I = \displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$

Utilisation d'une série entière

Q.1. Démontrer à l'aide d'une série entière que $I = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}$

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)k!}$

Q.2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on $|I - s_n| \leq \dfrac{1}{(2n+3)(n+1)!}$

Utilisation d'une autre suite de fonctions

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $[0, +\infty[$ la fonction f_n par : $f_n(x) = \left(1 - \dfrac{x^2}{n}\right)^n$

Q.3. Déterminer, en détaillant, la limite simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Q.4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $\forall x \in [0,1],\ |f_n(x)| \leq e^{-x^2}$. En déduire que

$$I = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{n^k(2k+1)}$$

Notion de polynôme interpolateur

Soit $f\ :\ [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On se donne $n+1$ points $x_0, x_1, \ldots, x_n$ dans $[a,b]$, deux à deux distincts. On appelle polynome interpolateur de f aux points x_i, un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ qui coïncide avec f aux points x_i, c'est-à-dire tel que pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, $P(x_i) = f(x_i)$.

Existence du polynôme interpolateur

Pour tout entier i de $[\![0, n]\!]$, on définit le polynôme l_i de $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$l_i(X) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{X - x_k}{x_i - x_k}$$

On pose :

$$L_n(f) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(X)$$

Q.5. Démontrer que $L_n(f)$ est un polynôme interpolateur de f aux points x_i, puis démontrer l'unicité d'un tel polynôme.

Un tel polynôme est appelé polynôme interpolateur de Lagrange.

Famille de polynômes orthogonaux

On munit $\mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels du produit scalaire $\langle ., . \rangle$ défini par : pour tous polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$,

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\, dt$$

On applique le procédé d'orthonomalisation de Gram-Schmidt à la base canonique $(1, X, X^2, \dots)$ de $\mathbb{R}[X]$. On obtient donc une famille orthonormée de polynômes $(P_0, P_1, P_2, \dots)$ vérifiant

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{Vect}(1, X, \dots, X^k) = \mathrm{Vect}(P_0, P_1, \dots, P_k)$$

Le polynôme P_n s'appelle le polynôme de Legendre d'indice n.

Q.6. Calculer P_0 et P_1.

Q.7. Justifier que pour $n \geq 1$, le polynôme P_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Démontrer que le polynôme P_n est de degré n.

On prend $n \geq 1$. On veut démontrer que P_n admet n racines simples dans $[-1, 1]$.

Q.8. Justifier que $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_n(t)\, dt = 0$ et en déduire que P_n admet au moins une racine dans $[-1, 1]$.

On suppose par l'absurde que P_n admet strictement moins de n racines simples. Si P_n admet des racines $t_1, \dots, t_p$ de multiplicité impaire avec $p < n$, on pose $Q = (X - t_1) \dots (X - t_p)$; sinon, on pose $Q = 1$. On considère enfin le polynôme $H = QP_n$.

Q.9. Justifier que $\displaystyle\int_{-1}^{1} H(t)\, dt = 0$, puis conclure (on pourra remarquer que H est de signe constant sur $[-1, 1]$).

Méthodes de quadrature

Dans cette partie, nous allons voir comment les polynôme interpolateurs de Lagrange peuvent être utilisés pour estimer $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ pour $f\ :\ [a,b]\to\mathbb{R}$ continue.

Pour cela, on choisit d'abord une subdivision $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ de l'intervalle $[a, b]$. A cause du phénomène de Runge, si N est grand, le polynôme interpolateur de f aux points x_i n'est pas forcément une bonne approximation de f. Approximer $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ par $\displaystyle\int_a^b L_N(f)(x)\,dx$ n'est donc pas forcément pertinent...

Nous allons en fait approximer f par un polynôme d'interpolation sur chaque petit intervalle $[x_k, x_{k+1}]$. D'après la relation de Chasles, on a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{N-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx$$

Q.10. Justifier que

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx = \frac{x_{k+1}-x_k}{2}\int_{-1}^{1} g(t)\,dt \quad \text{avec} \quad g(t) = f\left(x_k + (t+1)\frac{x_{k+1}-x_k}{2}\right)$$

On est donc ramenés à estimer $\displaystyle\int_{-1}^{1} g(t)\,dt$ où $g\ :\ [-1,1]\to\mathbb{R}$ est une fonction continue.

On se donne $n+1$ points $t_0, t_1, \ldots, t_n$ dans $[-1, 1]$, deux à deux distincts.

On rappelle que $L_n(g) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} g(t_i)l_i(X)$ est le polynôme interpolateur de g aux points t_i et on pose

$$J(g) = \int_{-1}^{1} L_n(g)(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n}\alpha_i g(t_i) \quad \text{avec} \quad \alpha_i = \int_{-1}^{1} l_i(t)\,dt$$

Lorsqu'on approxime $\displaystyle\int_{-1}^{1} g(t)\,dt$ par $J(g)$, c'est-à-dire :

$$\int_{-1}^{1} g(t)\,dt \approx \sum_{i=0}^{n}\alpha_i g(t_i)$$

on dit que J est une méthode de quadrature associée aux points $t_0, \ldots, t_n$ et aux poids $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$.

Q.11. Justifier que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $J(P) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)\,dt$.

On dit que la méthode de quadrature J est d'ordre au moins n car la formule approchée est exacte pour les polynômes de dégré inférieur ou égal à n.

Q.12. Exemple : on prend $n = 1$, $t_0 = -1$ et $t_1 = 1$. Déterminer α_0 et α_1. Expliquer à l'aide d'un graphique en prenant g positive pourquoi, dans ce cas, la méthode J s'appelle la "méthode des trapèzes".

Quadrature de Gauss

Dans les deux questions suivantes, on prend pour points d'interpolation $t_0, t_1, \ldots, t_n$ les $(n+1)$ racines du polynôme de Legendre P_{n+1} introduit dans la partie 3.

Nous allons démontrer que, dans ce cas, la formule de quadrature J est d'ordre au moins $2n+1$.

Soit $P \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$. On fait la division euclidienne de P par P_{n+1}, on note respectivement Q le quotient et R le reste de cette division :

$$P = QP_{n+1} + R$$

Q.13. Démontrer que $J(QP_{n+1}) = \displaystyle\int_{-1}^{1} Q(t)P_{n+1}(t)\,dt$, puis conclure que $J(P) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)\,dt$.

Q.14. Démontrer que les poids $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ associés à la quadrature de Gauss sont strictement positifs et calculer leur somme.

Problème 2 : Autour de la transformée de Fourier.

Soit $I = \mathbb{R}_+$. On note $E = C^0(I, \mathbb{C})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$.
Soit $\alpha > 0$ un réel. On note E_α l'ensemble des fonctions f de E telles que la fonction

$$g : t \mapsto g(t) = f(t)\exp(\alpha t)$$

soit intégrable sur I.
La notation $f^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre k de f.
On se propose d'étudier la fonction $T(f)$ qui à un nombre réel x associe, sous réserve d'existence,

$$T(f)(x) = \int_0^{+\infty} \exp(itx)f(t)\mathrm{d}t.$$

On notera pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $M_n(f) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n f(t)\mathrm{d}t$ lorsque ces intégrales ont un sens.
Dans toutes les questions qui suivent, le réel $\alpha > 0$ est fixé et f est un élément de E_α.

Q.1. Étude de $M_n(f)$. On posera dans cette question $\gamma = \displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)|\exp(\alpha t)\mathrm{d}t$ et $g(t) = f(t)\exp(\alpha t)$.

a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Étudier les variations sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $t \mapsto t^n \exp(-\alpha t)$.
On précisera en particulier son maximum.

b. En remarquant que $t^n f(t) = t^n \exp(-\alpha t)g(t)$, prouver que $M_n(f)$ existe pour tout $n \in \mathbb{N}$, et montrer que

$$|M_n(f)| \leq \gamma \left(\frac{n}{\alpha}\right)^n \exp(-n).$$

Q.2. Continuité et dérivabilité de la fonction $T(f)$.

Dans cette question, on étudie quelques propriétés de la fonction $T(f) : x \mapsto T(f)(x)$.

a. Montrer que l'on peut définir $T(f)(x)$ pour tout réel x et que $T(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que $T(f)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

c. Montrer que la fonction $T(f)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, [T(f)]'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} it\exp(itx)f(t)\mathrm{d}t$.

d. Montrer que $T(f)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

e. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $[T(f)]^{(p)}(x)$.

f. Montrer que : $[T(f)]^{(p)}(0) = i^p M_p(f)$ et que $\sup\{|T(f)^{(p)}(x)| : x \in \mathbb{R}\} \leq M_p(f)$.

Q.3. Développement en série de $T(f)$.

On se propose de montrer que pour tout réel $x \in]-\alpha, \alpha[$, $T(f)(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} i^n \frac{M_n(f)}{n!}x^n$.

a. Démontrer que la série $\sum_n i^n \frac{M_n(f)}{n!}x^n$ converge lorsque $|x| < \alpha$.
(on admettra que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$)

b. Expliciter au choix la formule de Taylor avec reste intégral ou bien l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction $T(f)$ entre 0 et x à l'ordre n.

c. En déduire à l'aide d'une inégalité de Taylor que la somme de la série $\sum_n i^n \frac{M_n(f)}{n!}x^n$ est égale à $T(f)(x)$ pour tout x tel que $|x| < \alpha$.

Q.4. Limite de $T(f)$ dans un cas particulier.

Dans cette question, $f \in E_\alpha$ et on suppose de plus que f est de classe C^1 sur I et que $f' \in E_\alpha$.

On peut donc considérer la fonction $T(f') : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(itx)f'(t)\mathrm{d}t$.

a. Justifier que f et f' sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$.

b. En remarquant que $f(t) = f(0) + \int_0^t f'(u)\mathrm{d}u$, montrer que f admet une limite ℓ lorsque t tend vers $+\infty$.

c. Montrer alors que $\ell = 0$.

d. Montrer que pour tout réel x, $T(f')(x) = -f(0) - ixT(f)(x)$.

e. On rappelle que $T(f')$ est bornée sur $\mathbb{R}$.
Montrer que $T(f)$ admet pour limite 0 en $+\infty$ et en $-\infty$.

Q.5. Étude d'un exemple.

Dans cette question, $f(t) = \exp(-t^2)$.

a. Déterminer l'ensemble des réels $\alpha > 0$ tels que $f \in E_\alpha$.

b. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, M_{2n}(f) = \frac{1}{2}\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

où Γ est la fonction Γ d'Euler.

c. En déduire que

$$M_{2n}(f) = \left(\frac{1}{2}\prod_{k=0}^{n-1}(k + \frac{1}{2})\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

d. On admet que $\int_0^{+\infty} \exp(-t^2)\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. En déduire la valeur de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ puis l'expression de $M_{2n}(f)$ à l'aide de factorielles.

Q.6. Déduire de ces calculs et du développement en série de $T(f)$ que

$$\int_0^{+\infty} \cos(tx)\exp(-t^2)\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\exp(-x^2/4).$$