DS 6 : 4h

Vendredi 26 janvier 2018
L'usage des calculatrices n'est pas autorisé

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction, même si tout résultat qui n'est pas explicitement dans le cours de MPSI ou de MP doit être démontré. Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Consignes à respecter sous peine d'être pénalisé :

- Changer de copie (ou au moins de feuille) à chaque exercice ou partie d'un problème.
- Numéroter les questions (et le cas échéant la partie).
- Souligner les résultats intermédiaires dans une démonstration à tiroirs, faire une phrase de conclusion et encadrer le résultat.

Exercice 1 :

Soit E l'ensemble des fonctions continues sur le segment $[-1,1]$ à valeurs réelles.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer l'existence et l'unicité d'un polynôme T_n à coefficients réels de degré égal à n tel que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta).$$

[on pourra remarquer que $\cos(n\theta)$ *est la partie réelle de* $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$*.]*

On définit alors une fonction polynomiale sur $[-1,1]$ par $\forall x \in [-1,1], T_n(x) = \cos(n \arccos x)$.

2. Montrer que pour toute fonction h de E, l'application $t \mapsto \dfrac{h(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur $]-1,1[$.

Pour f et g éléments de E, on pose $(f|g) = \displaystyle\int_{]-1,1[} \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$.

3. Montrer que $(.|.)$ définit un produit scalaire sur E.
Ceci nous permet de définir une norme euclidienne sur E : on note $||h||_2 = \sqrt{(h|h)}$.

4. Calculer $(T_m|T_n)$ selon les valeurs des entiers naturels m et n. En déduire pour tout entier naturel n que la famille $(T_0, T_1, \dots, T_n)$ est une base orthogonale pour $(.|.)$ de E_n.
Dans toute la suite, f désignera un élément de E et n un entier naturel.
On pose $d_2(f, E_n) = \inf\{||f-Q||_2, Q \in E_n\}$.

5. a. Énoncer un théorème (en précisant les hypothèses) justifiant l'existence d'un vecteur $t_n(f)$ dans E_n tel que $||f - t_n(f)||_2 = d_2(f, E_n)$.

b. Exprimer $t_n(f)$ à l'aide des polynômes $(T_k)_{0\le k\le n}$.

On dit que $t_n(f)$ est le polynôme de meilleure approximation quadratique de f sur E_n.

6. Montrer que $d_2(f, E_n) = \sqrt{||f||_2^2 - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(f|T_k)^2}{||T_k||_2^2}}$.

7. a. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k\ge 0} \frac{(f|T_k)^2}{||T_k||_2^2}$ est convergente.

b. Que pensez-vous de la limite de $\displaystyle\int_{]-1,1[} \frac{f(t)T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ lorsque n tend vers $+\infty$?

8. a. Déterminer une constante $k > 0$ telle que $\forall h \in E, ||h||_2 \le k||h||_\infty$.

b. En déduire soigneusement que $\lim_{n\to+\infty} ||f - t_n(f)||_2 = 0$.

9. Que peut-on dire d'une fonction h de E telle que pour tout entier naturel n,

$$\int_{]-1,1[} \frac{h(t)T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = 0.$$

Problème

Ce problème aborde l'etude de la transformation de Fourier utilisées pour le traitement des signaux analogiques. Elle permet de modéliser le comportement fréquentiel d'un signal. La partie 1 étudie quelques propriétés de la transformée de Fourier dun signal analogique continu par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$. La partie 2 aboutit à la formule d'inversion de Fourier qui permet de retrouver un signal à partir de sa transformée de Fourier. La partie 3 traite le cas particulier dun signal dont le spectre des fréquences est limité à $[-1/2, 1/2]$. La partie 4 étudie le cas particulier d'un signal périodique.
On note

- E_{cpm} le $\mathbb{C}$ espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues par morceaux sur $\mathbb{R}$ et **intégrables** sur $\mathbb{R}$;
- $\mathcal{S}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall k \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^k f(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Transformation de Fourier

Pour toute fonction $f \in E_{cpm}$, on considère la fonction $\mathcal{F}(f)$ (*transformée de Fourier de* f) définie par

$$\forall u,\ \mathcal{F}(f)(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2\pi itu}\, dt$$

1.A. On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1.A.1 Justifier que φ appartient à E_{cpm} et calculer sa transformée de Fourier $\mathcal{F}(\varphi)$.

1.A.2 Montrer que $\mathcal{F}(\varphi)$ est continue en 0.

1.B

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \psi(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \quad \text{et} \quad \psi(0) = 1$$

1.B.1 Prouver

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_n^{n+1} |\psi(x)|\, dx \geq \frac{2}{\pi^2(n+1)}$$

1.B.2 En déduire que ψ n'appartient pas à E_{cpm}.

1.C Soit $f \in E_{cpm}$. Montrer que la fonction $\mathcal{F}(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

1.D Soit $f \in \mathcal{S}$.

1.D.1 Justifier que, pour tout entier naturel n, la fonction $x \mapsto x^n f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

1.D.2 Démontrer que la fonction $\mathcal{F}(f)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall u \in \mathbb{R},\ (\mathcal{F}(f))^n(u) = (-2i\pi)^n \int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t)e^{-2i\pi u}\, dt$$

1.E On considère la fonction $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $\theta(x) = \exp(-\pi x^2)$, pour $x \in \mathbb{R}$.

1.E.1 justifier que $\theta \in \mathcal{S}$ et que $\mathcal{F}(\theta)$ est solution de l'équation différentielle

$$\forall u \in \mathbb{R},\ y'(u) = -2\pi u y(u)$$

1.E.2 Etablir que $\mathcal{F}(\theta) = \theta$. *On admettra que* $\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x)\, dx = 1$.

Formule d'inversion de Fourier

Soit $f \in \mathcal{S}$. on suppose que $\mathcal{F}(f)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour tout entier naturel non nul n, on pose

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(u)\theta\left(\frac{u}{n}\right)\, du \qquad J_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{t}{n}\right)\mathcal{F}(\theta)(t)\, dt$$

2.A Montrer que $\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(u)\,du$.

2.B Calculer $\lim_{n\to+\infty} J_n$.

2.C Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = J_n$.
On admettra la formule de Fubini :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\theta\left(\frac{u}{n}\right)e^{-2i\pi ut}\,du\right)dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\theta\left(\frac{u}{n}\right)e^{-2i\pi ut}\,dt\right)du$$

2.D Démontrer que $f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(u)\,du$.
En déduire en utilisant la fonction $h\ :\ t \mapsto f(x+t)$, que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(u)e^{2i\pi xu}\,du \tag{2.1}$$

Cette formule permet de reconstruire le signal f à partir de sa transformée de Fourier $\mathcal{F}(f)$.

2.E Une application
Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2i\pi ux}}{1+(2\pi u)^2}\,du = \frac{1}{2}e^{-|x|}$.

Transformée de Fourier à support compact

Soit f une fonction de $\mathcal{S}$ dont la transformée de Fourier $\mathcal{F}(f)$ est nulle en dehors du segment $[-1/2, 1/2]$. D'après la relation (2.1), on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_{-1/2}^{1/2} \mathcal{F}(f)(u)e^{2i\pi xu}\,du$$

3.A Démontrer que $\mathcal{F}(f)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{S}$. En déduire que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

3.B Prouver par exemple à l'aide d'une formule de Taylor que

$$\forall (x, x_0) \in \mathbb{R}^2,\ f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!} \int_{-1/2}^{1/2} (2i\pi u)^k \mathcal{F}(f)(u)e^{2i\pi x_0 u}\,du$$

3.C On suppose que f est nulle sur un intervalle $]x_0 - r, x_0 + r[$ avec $r > 0$. Montrer que $f = 0$.

Cas de fonctions périodiques

Pour tout entier naturel n, on note S_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R},\ S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{2\pi ikx}$

Soit $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et 1-périodique. On considère :

- la fonction g définie sur $[-1, 1]$ par

$$\forall x \in]-1, 1[\setminus\{0\},\ g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{\sin(\pi x)} \qquad g(0) = \frac{f'(0)}{\pi} \qquad g(1) = g(-1) = -g(0)$$

- la suite de complexes $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f) = \int_{-1/2}^{1/2} f(x)e^{-2\pi inx}\,dx$$

4.A

4.A.1 Montrer que la fonction g est de classe C^1 sur $]-1, 1[\setminus\{0\}$ et continue sur $]-1, 1[$.

4.A.2 Montrer que la limite de g' en 0 est égale à $\dfrac{f''(0)}{2\pi}$.

4.A.3 En déduire que g est de classe C^1 sur $]-1,1[$.
On admet dorénavant que g est de classe C^1 sur $[-1,1]$.

4.B Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} S_n(x)\, dx$.

4.C Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \setminus \{0\},\ S_n(x) = \frac{\sin((2n+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}$$

4.D Justifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) = f(0) + \int_{-1/2}^{1/2} g(x) \sin((2n+1)\pi x)\, dx$$

4.E A l'aide d'une intégration par parties, montrer l'existence d'un réel C tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left| \int_{-1/2}^{1/2} g(x) \sin((2n+1)\pi x)\, dx \right| \leq \frac{C}{2n+1}$$

4.F Soit $t \in [-1/2, 1/2]$. On considère la fonction G_t définie sur $[-1/2, 1/2]$ par

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right],\ G_t(x) = f'(x+t)\sin(\pi x) - (f(x+t) - f(t))\pi\cos(\pi x)$$

Etablir l'existence d'un réel D, indépendant de x et de de t, tel que

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right],\ \forall t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right],\ |G_t(x)| \leq Dx^2$$

4.G Prouver l'existence d'un réel E tel que

$$\forall t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right],\ \left| f(t) - \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{2i\pi kt} \right| \leq \frac{E}{2n+1} \tag{4.1}$$

On pourra introduire la fonction $h_t\ :\ x \mapsto f(x+t)$.

DS 6 : 4h

Vendredi 26 janvier 2018
L'usage des calculatrices n'est pas autorisé

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction, même si tout résultat qui n'est pas explicitement dans le cours de MPSI ou de MP doit être démontré. Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Consignes à respecter sous peine d'être pénalisé :

- Changer de copie (ou au moins de feuille) à chaque exercice ou partie d'un problème.
- Numéroter les questions (et le cas échéant la partie).
- Souligner les résultats intermédiaires dans une démonstration à tiroirs, faire une phrase de conclusion et encadrer le résultat.

Exercice 1 :

Soit E l'ensemble des fonctions continues sur le segment $[-1,1]$ à valeurs réelles.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $T_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k} X^{n-2k} (1-X^2)^k$ est de degré égal à n et que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta).$$

[on pourra remarquer que $\cos(n\theta)$ *est la partie réelle de* $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$*.]*

On définit alors une fonction polynomiale sur $[-1,1]$ par $\forall x \in [-1,1], T_n(x) = \cos(n \arccos x)$.

2. Justifier que pour toute fonction h de E, $\dfrac{h(t)}{\sqrt{1-t^2}} = O(\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ au voisinage de 1.

3. En déduire que l'application $t \mapsto \dfrac{h(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur $]-1,1[$.

Pour f et g éléments de E, on pose $(f|g) = \displaystyle\int_{]-1,1[} \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$.

4. Montrer que $(.|.)$ définit un produit scalaire sur E.

Ceci nous permet de définir une norme euclidienne sur E : on note $||h||_2 = \sqrt{(h|h)}$.

5. Montrer que $(T_m|T_n) = \int_0^\pi \cos(nu)\cos(mu)\,\mathrm{d}u$.

6. Montrer que $(T_m|T_n) = 0$ si $n \neq m$ et que la famille $(T_0, T_1, \ldots, T_n)$ est une base orthogonale pour $(.|.)$ de E_n.

Dans toute la suite, f désignera un élément de E et n un entier naturel.

On pose $d_2(f, E_n) = \inf\{||f-Q||_2, Q \in E_n\}$.

7. a. Citer le théorème de la projection orthogonale.

b. En déduire l'existence d'un vecteur $t_n(f)$ dans E_n tel que $||f - t_n(f)||_2 = d_2(f, E_n)$.

c. Exprimer $t_n(f)$ à l'aide des polynômes $(T_k)_{0 \leq k \leq n}$.

On dit que $t_n(f)$ est le polynôme de meilleure approximation quadratique de f sur E_n.

8. Montrer que $d_2(f, E_n) = \sqrt{||f||_2^2 - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(f|T_k)^2}{||T_k||_2^2}}$.

9. a. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k \geq 0} \frac{(f|T_k)^2}{||T_k||_2^2}$ est convergente.

b. Que pensez-vous de la limite de $\displaystyle\int_{]-1,1[} \frac{f(t)T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ lorsque n tend vers $+\infty$?

10. **a.** Déterminer une constante $k > 0$ telle que $\forall h \in E, ||h||_2 \leq k||h||_\infty$.

b. Citer le théorème de Stone et Weierstrass.

c. En déduire soigneusement que $\lim_{n\to+\infty} ||f - t_n(f)||_2 = 0$.

11. Que peut-on dire d'une fonction h de E telle que pour tout entier naturel n,

$$\int_{]-1,1[} \frac{h(t)T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = 0.$$

Problème

Ce problème aborde l'etude de la transformation de Fourier utilisées pour le traitement des signaux analogiques. Elle permet de modéliser le comportement fréquentiel d'un signal. La partie 1 étudie quelques propriétés de la transformée de Fourier dun signal analogique continu par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$. La partie 2 aboutit à la formule d'inversion de Fourier qui permet de retrouver un signal à partir de sa transformée de Fourier. La partie 3 étudie le cas particulier d'un signal périodique.

On note

- E_{cpm} le $\mathbb{C}$ espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues par morceaux sur $\mathbb{R}$ et **intégrables** sur $\mathbb{R}$;
- $\mathcal{S}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall k \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^k f(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Transformation de Fourier

Pour toute fonction $f \in E_{cpm}$, on considère la fonction $\mathcal{F}(f)$ (*transformée de Fourier de* f) définie par

$$\forall u,\ \mathcal{F}(f)(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2\pi i t u}\,dt$$

1.A. On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1.A.1 Justifier que φ appartient à E_{cpm} et montrer que sa transformée de Fourier vérifie $\mathcal{F}(\varphi)(0) = 1$ et $\mathcal{F}(\varphi)(x) = \dfrac{\sin(\pi x}{\pi x}$ pour $x \neq 0$.

1.A.2 Montrer que $\mathcal{F}(\varphi)$ est continue en 0.

1.B

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \psi(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \quad \text{et} \quad \psi(0) = 1$$

1.B.1 À l'aide d'une minoration de $\dfrac{1}{x}$ sur $[n, n+1]$, prouver

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_n^{n+1} |\psi(x)|\,dx \geq \frac{2}{\pi^2(n+1)}$$

1.B.2 En déduire que ψ n'est pas intégrable donc n'appartient pas à E_{cpm}.

1.C Soit $f \in E_{cpm}$. Montrer à l'aide du théorème de continuité des intégrales à paramètres que la fonction $\mathcal{F}(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

1.D Soit $f \in \mathcal{S}$.

1.D.1 Justifier que, pour tout entier naturel n, la fonction $x \mapsto x^n f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

1.D.2 Démontrer à l'aide du théorème de dérivation des intégrales à paramètres que la fonction $\mathcal{F}(f)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

1.D.3 On admet que ce théorème s'applique aux dérivées successives. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall u \in \mathbb{R},\ (\mathcal{F}(f))^n(u) = (-2i\pi)^n \int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t) e^{-2i\pi u}\,dt$$

1.E On considère la fonction $\theta\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $\theta(x) = \exp(-\pi x^2)$, pour $x \in \mathbb{R}$.

1.E.1 justifier que $\theta \in \mathcal{S}$ et que $\mathcal{F}(\theta)$ est solution de l'équation différentielle

$$\forall u \in \mathbb{R},\ y'(u) = -2\pi u y(u)$$

[On pourra faire apparaître un "crochet" de la fonction $t \mapsto \exp(-\pi t^2 - 2i\pi xt)$*.]*

1.E.2 Etablir que $\mathcal{F}(\theta) = \theta$. *On admettra que* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x)\, dx = 1$.

Formule d'inversion de Fourier

Soit $f \in \mathcal{S}$. on suppose que $\mathcal{F}(f)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour tout entier naturel non nul n, on pose

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(u)\theta\left(\frac{u}{n}\right)\, du \qquad J_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{t}{n}\right)\mathcal{F}(\theta)(t)\, dt$$

2.A En appliquant le théorème de convergence dominée, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(u)\, du$.

2.B En appliquant à nouveau le théorème de convergence dominée, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n = f(0)$.

2.C Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = J_n$.
On admettra la formule de Fubini :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\theta\left(\frac{u}{n}\right)e^{-2i\pi ut}\, du\right)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\theta\left(\frac{u}{n}\right)e^{-2i\pi ut}\, dt\right)\, du$$

2.D Démontrer que $f(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(u)\, du$.
En déduire en utilisant la fonction $h\ :\ t \mapsto f(x+t)$, que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(u)e^{2i\pi xu}\, du \tag{2.1}$$

Cette formule permet de reconstruire le signal f à partir de sa transformée de Fourier $\mathcal{F}(f)$.

2.E Une application

2.E.1 Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \exp(t(1 - 2\pi ix)\, \mathrm{d}t$.

2.E.2 En déduire que $\mathcal{F}(f)(x) = \dfrac{1}{1 + 4\pi^2x^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

2.E.3 Justifier alors que $\forall x \in \mathbb{R},\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2i\pi ux}}{1 + (2\pi u)^2}\, du = \frac{1}{2}e^{-|x|}$.

Cas de fonctions périodiques

Pour tout entier naturel n, on note S_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R},\ S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} e^{2\pi ikx}$

Soit $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et 1-périodique. On considère :

- la fonction g définie sur $[-1, 1]$ par

$$\forall x \in]-1,1[\setminus\{0\},\ g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{\sin(\pi x)} \qquad g(0) = \frac{f'(0)}{\pi} \qquad g(1) = g(-1) = -g(0)$$

- la suite de complexes $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f) = \int_{-1/2}^{1/2} f(x)e^{-2\pi inx}\, dx$$

4.A

4.A.1 Montrer que la fonction g est de classe C^1 sur $]-1,1[\setminus\{0\}$ et continue sur $]-1,1[$.

4.A.2 Montrer que la limite de g' en 0 est égale à $\dfrac{f''(0)}{2\pi}$.

4.A.3 En déduire que g est de classe C^1 sur $]-1,1[$.
On admet dorénavant que g est de classe C^1 sur $[-1,1]$.

4.B Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} S_n(x)\,dx$.

4.C Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \setminus \{0\},\ S_n(x) = \frac{\sin((2n+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}$$

4.D Justifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) = f(0) + \int_{-1/2}^{1/2} g(x)\sin((2n+1)\pi x)\,dx$$

4.E A l'aide d'une intégration par parties, montrer l'existence d'un réel C tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left|\int_{-1/2}^{1/2} g(x)\sin((2n+1)\pi x)\,dx\right| \leq \frac{C}{2n+1}$$

4.F Soit $t \in [-1/2, 1/2]$. On considère la fonction G_t définie sur $[-1/2, 1/2]$ par

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right],\ G_t(x) = f'(x+t)\sin(\pi x) - (f(x+t) - f(t))\pi\cos(\pi x)$$

Etablir l'existence d'un réel D, indépendant de x et de de t, tel que

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right],\ \forall t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right],\ |G_t(x)| \leq Dx^2$$

4.G Prouver l'existence d'un réel E tel que

$$\forall t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right],\ \left|f(t) - \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{2i\pi kt}\right| \leq \frac{E}{2n+1} \tag{4.1}$$

On pourra introduire la fonction $h_t\ :\ x \mapsto f(x+t)$.