

### E3A 2009 - MP - Maths A

#### Partie I

1. C'est la formule pour la somme des termes d'une suite géométrique de raison  $-x \neq -1$ .
2. Il suffit d'intégrer l'égalité précédente sur le segment borné par 0 et  $x$ , sur lequel toutes les fonctions concernées sont continues.

3. D'après l'égalité du 2., il suffit de montrer que l'intégrale  $\int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t} dt$  a pour limite 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

On peut utiliser le théorème de convergence dominée : pour tout  $n$ , soit  $f_n : t \mapsto \frac{(-1)^n t^n}{1+t}$ . Les fonctions  $f_n$  sont continues par morceaux et intégrables sur  $]0, x[$  (ou  $]x, 0[$  si  $x < 0$ ), la suite  $(f_n)$  converge simplement sur cet intervalle vers la fonction nulle (elle-même continue par morceaux), et est dominée par la fonction  $t \mapsto \frac{1}{1+t}$ , elle aussi intégrable. Cela suffit pour garantir que l'intégrale a pour limite 0.

4. La relation (1) s'en déduit en prenant  $x = 1$ ; la (2) en prenant  $x = -1/2$ .

5.i C'est le théorème sur les séries alternées.

5.ii a) On a, pour tout  $p \geq 1$ ,  $S_{p+2} - S_p = (-1)^{p+1}(u_{p+2} - u_{p+1})$ , du signe de  $(-1)^p$  puisque la suite  $(u_n)$  décroît. En prenant  $p = 2n$  (respectivement  $2n - 1$ ), on en déduit la croissance de la suite  $(S_{2n})$  (respectivement la décroissance de  $(S_{2n-1})$ ).

b) La suite  $(S_{2n})$  croît, donc est majorée par sa limite  $S$ ; de même pour l'autre inégalité.

5.iii On en déduit, pour tout  $p \geq 1$  :  $0 \leq S - S_{2p} \leq S_{2p-1} - S_{2p} = u_{2p}$  et  $0 \leq S_{2p-1} - S \leq S_{2p-1} - S_{2p} = u_{2p} \leq u_{2p-1}$  ce qui fournit le résultat demandé pour tout  $n \geq 1$ , pair ou impair.

6. On applique les résultats du 5. avec  $u_n = 1/n$ . On a alors, avec les notations du 5. et grâce à la relation (1),  $|\ln(2) - S_n| \leq \frac{1}{n}$  pour tout  $n \geq 1$ . On peut donc prendre  $N_p = 10^p$ .

7.i On a pour tout  $n \geq 1$  :  $0 \leq R_n \leq \sum_{i=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{1-1/2} = \frac{1}{2^n}$  (en posant  $k = i - (n+1)$ ).

7.ii Puisque  $R_n = \ln(2) - \sum_{i=1}^n \frac{1}{i2^i}$  et que  $R_n \leq \frac{1}{2^n}$ , il suffit d'avoir  $\frac{1}{2^{N'_p}} \leq 10^{-p}$  soit  $N'_p \geq \frac{\ln 10}{\ln 2} p$ .

Si on tient vraiment à un entier, on peut donc prendre  $N'_p = 1 + \lfloor \frac{\ln 10}{\ln 2} p \rfloor$ .

7.iii  $N_p$  dépend exponentiellement de  $p$ , alors que  $N'_p$  est majoré par  $2 + \frac{\ln 10}{\ln 2} p$ , fonction affine; les croissances comparées montrent que  $N_p$  tend beaucoup plus vite que  $N'_p$  vers  $+\infty$ .

#### Partie II

1. Le polynôme  $Q = P(-1) - P(X)$  s'annule en  $-1$ , donc est divisible par  $X + 1$ ; il existe donc bien un unique polynôme  $R = \varphi_n(P)$  tel que  $Q = (X + 1)R$ , qui est le quotient dans la division euclidienne de  $Q$  par  $X + 1$ . De plus, on a  $\deg Q = \deg(X + 1) + \deg R = 1 + \deg R$  et  $\deg Q \leq \deg P \leq n$ , donc  $R = \varphi_n(P) \in \mathbf{R}_{n-1}[X]$ .

2. Soient  $P$  et  $Q$  dans  $\mathbf{R}_n[X]$  et  $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$ . Alors

$$\begin{aligned} [\lambda P + \mu Q](-1) - [\lambda P + \mu Q](X) &= \lambda(P(-1) - P(X)) + \mu(Q(-1) - Q(X)) \\ &= \lambda(X + 1)\varphi_n(P) + \mu(X + 1)\varphi_n(Q) \\ &= (X + 1)(\lambda\varphi_n(P) + \mu\varphi_n(Q)) \end{aligned}$$

La définition de  $\varphi_n$  montre alors que  $\varphi_n(\lambda P + \mu Q) = \lambda\varphi_n(P) + \mu\varphi_n(Q)$  donc que  $\varphi_n$  est linéaire.

D'autre part, on a clairement  $\varphi_n(P) = 0 \iff P(X) = P(-1)$ , donc si et seulement si  $P$  est un polynôme constant. Le noyau de  $\varphi_n$  est donc l'espace des polynômes constants.

Cet espace est de dimension 1 ; la formule du rang montre alors que l'image de  $\varphi_n$  est de dimension  $(\dim \mathbf{R}_n[X]) - 1 = n = \dim \mathbf{R}_{n-1}[X]$ . Cette image est donc  $\mathbf{R}_{n-1}[X]$  tout entier, et donc  $\varphi_n$  est surjective.

**3.** On connaît l'identité  $a^p - b^p = (a - b) \sum_{k=0}^{p-1} a^{p-1-k} b^k$  valable, pour tout  $p \geq 1$ , dans n'importe quel anneau commutatif.

Appliquée à  $a = -1$  et  $b = X$ , elle fournit pour  $P = X^p$  :  $P(-1) - P(X) = -(1+X) \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{p-1-k} X^k$  soit  $\varphi_n(X^p) = \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{p-k} X^k$  pour tout  $p$  tel que  $1 \leq p \leq n$ . Puisque  $\varphi_n(1) = 0$ , la matrice cherchée est donc

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & \cdots & \cdots & (-1)^n \\ \vdots & 0 & -1 & 1 & & (-1)^{n-1} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Plus précisément,  $M = (m_{ij})$  est une matrice à  $n$  lignes et  $n + 1$  colonnes, dans laquelle  $m_{ij}$  est le coefficient de  $X^{i-1}$  dans  $\varphi_n(X^{j-1})$  ; donc  $m_{ij} = 0$  si  $i \geq j$ , et vaut  $(-1)^{j-i}$  sinon.

**4.** On utilise la matrice : pour tout  $(i, j)$ ,  $a_i$  est la  $(i + 1)$ -ème coordonnée de  $P$  dans la base canonique, et  $b_j$  la  $(j + 1)$ -ème coordonnée de  $\varphi_n(P)$ . On a donc pour tout  $j$  :

$$b_j = \sum_{i=0}^n m_{j+1, i+1} a_i = \sum_{i=j+1}^n (-1)^{i-j} a_i$$

qui donne bien le résultat demandé puisque  $(-1)^{-j} = (-1)^j$ .

### Partie III

1. La fonction  $g$  est continue par morceaux sur  $I$ , et  $|g(x)| \leq f(x)$  pour tout  $x \in I$ . Puisque  $f$  est intégrable sur  $I$ ,  $g$  l'est donc aussi par théorème de comparaison d'intégrales de fonctions positives.

2. Même démonstration.

3. Puisque  $f$  est positive sur  $I$ , on a, pour tout  $n \in \mathbf{N}$  et tout  $x \in I$  :  $0 \leq x^{n+1} f(x) \leq x^n f(x)$ . En intégrant cette inégalité sur  $I$  (légitime d'après **2.**), on en déduit  $u_{n+1}(f) \leq u_n(f)$  pour tout  $n$ .

D'autre part, la suite de fonctions  $(f_n)$  converge simplement vers la fonction nulle sur  $]0, 1[$ , et est dominée par  $f$ , intégrable sur  $I$  donc sur  $]0, 1[$  ; le théorème de convergence dominée permet donc d'affirmer que la suite  $(u_n(f))$  (considérée comme une suite d'intégrales sur  $]0, 1[$ ) a pour limite 0.

Le théorème sur les séries alternées prouve alors que la série  $\sum (-1)^n u_n(f)$  converge.

**4.** Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , notons  $S_n$  la somme partielle  $\sum_{k=0}^n u_k(f)$ . La question **I.1.** fournit alors

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad S_n + (-1)^{n+1} \int_I \frac{x^{n+1} f(x)}{1+x} dx = S_f$$

Une fois de plus, le théorème de convergence dominée, avec  $g$  comme fonction dominante, montre que l'intégrale figurant dans cette égalité a pour limite 0, ce qui fournit l'égalité  $\mathcal{E}_f$  par passage à la limite.

**5.(i)** La fonction  $f$  est bien intégrable sur  $I$ , les résultats précédents s'appliquent. Ici  $u_n(f) = 1/(n + 1)$

pour tout  $n$ , l'égalité  $\mathcal{E}_f$  donne donc  $\ln 2 = \int_I \frac{dx}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ . On retrouve donc l'égalité (1) du

**I.4.**

**5.(ii)** La fonction  $f$  est ici aussi intégrable sur  $I$ . On a, pour tout  $n \in \mathbf{N}$  :  $u_n(f) = \frac{1}{2} \int_I x^{n-1/2} dx =$

$$\frac{1}{2n-1}.$$

D'autre part, le changement de variable  $t = \sqrt{x}$ , légitime puisque la fonction racine carrée est un  $C^1$ -difféomorphisme de  $I$  dans lui-même, donne  $S_f = \int_I \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{4}$ . L'égalité  $\mathcal{E}_f$  devient donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$$

**5.(iii)** Encore une fois,  $f$  est bien intégrable sur  $I$ ; et, pour tout  $n$ ,  $u_n(f) = \frac{1}{3n-2}$ .

Le changement de variable  $u = x^{1/3}$  fournit bien  $S_f = \int_I \frac{dx}{1+x^3}$ . Puisque  $1+X^3 = (1+X)(1-X+X^2)$ , le coefficient de  $1/(1+X)$  dans la décomposition en éléments simples de  $1/(1+X^3)$  vaut  $[1/(1-X+X^2)](-1) = 1/3$ . On a alors

$$\frac{1}{1+X^3} - \frac{1}{3(1+X)} = -\frac{X^2-X-2}{3(X^3+1)} = -\frac{X-2}{3(X^2-X+1)} = -\frac{X-1/2}{3(X^2-X+1)} + \frac{1}{2(X-X+1)}$$

qui est la décomposition proposée par l'énoncé avec  $a = 1/3$ ,  $b = -1/6$  et  $c = 1/2$ .

On a alors  $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$ ,  $\int_0^1 \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx = [\ln(x^2-x+1)]_0^1 = 0$  et enfin, en utilisant  $\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a} \text{Arctan} \frac{t}{a}$  :  $\int_0^1 \frac{dx}{x^2-x+1} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1/2)^2+3/4} = \left[ \frac{2}{\sqrt{3}} \text{Arctan} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right]_0^1 = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ . On en déduit  $S_f = a \ln 2 + c \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ .

L'égalité  $\mathcal{E}_f$  donne donc ici  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n-2} = \frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ .

#### Partie IV

**1.** Découle immédiatement de  $\frac{P(-1)-P(x)}{1+x} = \varphi_n(P)(x)$  pour tout  $x \neq -1$ .

**2.** On applique la question précédente à  $T_n$ , et on divise par  $T_n(-1) \neq 0$ ; on obtient avec les notations de l'énoncé :

$$\begin{aligned} \left| S_f - \frac{S_n}{T_n(-1)} \right| &= \frac{1}{|T_n(-1)|} \left| \int_0^1 \frac{T_n(x)}{1+x} f(x) dx \right| \leq \frac{1}{|T_n(-1)|} \int_0^1 \frac{|T_n(x)|}{1+x} f(x) dx \quad (f \geq 0) \\ &\leq \frac{M_n}{|T_n(-1)|} \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x} dx = \frac{M_n S_f}{|T_n(-1)|} \end{aligned}$$

#### Partie V

**1.(i)** En utilisant la relation de récurrence vérifiée par  $(T_n)$ , on obtient  $v_{n+2} = 6v_{n+1} - v_n$  pour tout  $n$ .

**1.(ii)** La suite  $(v_n)$  vérifie donc une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants; son polynôme caractéristique  $X^2 - 6X + 1$  ayant deux racines simples  $3 + \sqrt{8}$  et  $3 - \sqrt{8}$ , on obtient bien le résultat de l'énoncé.

**1.(iii)** En écrivant l'égalité précédente aux rangs 0 et 1, on obtient  $\alpha = \beta = 1/2$ .

**2** La relation  $\deg T_n = n$  est vraie aux rangs 0 et 1. Si elle est vraie jusqu'à un rang  $n+1 \geq 1$ , alors  $\deg(2(1-2X)T_{n+1}) = n+2 > \deg T_n$  donc la relation de récurrence montre que  $\deg T_{n+2} = n+2$ . On a donc bien  $\deg T_n = n$  pour tout  $n$ .

D'autre part, puisque  $3 - \sqrt{8} > 0$ , Les résultats de **1.(i)** et **1.(ii)** montrent que  $v_n > 0$  pour tout  $n$ : on a donc bien  $T_n(-1) \neq 0$  pour tout  $n$ .

**3.** C'est vrai aux rangs 0 et 1 ; et, si c'est vrai jusqu'au rang  $n+1 \geq 1$ , la relation de récurrence montre que  $T_{n+2}$  est une différence de produits de polynômes à coefficients entiers, donc est lui-même un polynôme à coefficients entiers, ce qui achève la démonstration.

**4.** Soit  $x \in \mathbf{R}$ . On a  $T_0(\sin^2 x) = 1 = \cos(2 \cdot 0 \cdot x)$  et  $T_1(\sin^2 x) = 1 - 2\sin^2 x = \cos(2x)$ . Si l'on suppose l'égalité vraie jusqu'au rang  $n+1 \geq 1$ , alors  $T_{n+2}(\sin^2 x) = 2\cos(2x)\cos(2(n+1)x) - \cos(2nx) = \cos(2(n+2)x)$  en utilisant  $2\cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$ , ce qui achève la démonstration.

**5.** Soit  $x \in [0, 1]$  ; alors  $\sqrt{x} \in [0, 1]$ , on peut donc choisir  $t \in [0, \pi/2]$  tel que  $\sqrt{x} = \sin t$ . On a alors  $|T_n(x)| = |T_n(\sin^2 t)| = |\cos(2nt)| \leq 1$ . De plus, pour  $x = 0$ , on a  $t = 0$  donc  $|T_n(x)| = 1$ . On a donc bien  $M_n = 1$ .

D'autre part, puisque  $3 - \sqrt{8} > 0$ , on a  $T_n(-1) = v_n > (3 + \sqrt{8})^n / 2$  pour tout  $n$ , ce qui fournit immédiatement l'inégalité demandée.

**6.** Prenons pour  $f$  la fonction constante égale à 1. Comme vu en **III.5.**, on a  $S_f = \ln 2$ .

D'autre part, on a vu en **3.** que les polynômes  $T_n$  sont à coefficients entiers. La question **II.4.** montre alors que les polynômes  $\varphi_n(T_n)$  sont eux aussi à coefficients entiers. Par suite, les nombres  $S_n = \int_0^1 \varphi_n(T_n)(x) dx$  sont rationnels.

Puisque  $v_0 = 1$  et  $v_1 = 3$ , une récurrence double prouve que les nombres  $v_n = T_n(-1)$  sont tous entiers.

En posant  $t_n = \frac{S_n}{T_n(-1)}$  pour tout  $n$ , les  $t_n$  sont donc tous rationnels.

Enfin, l'inégalité du **5.**, jointe au résultat du **IV.2.**, montre que  $|\ln 2 - t_n| \leq \frac{K}{(3 + \sqrt{8})^n}$  avec  $K = 2S_f = 2\ln 2$ .

## Partie VI

**1.** La fonction  $g$  est construite à l'aide des opérations usuelles à partir de fonctions de classe  $C^5$  ; son dénominateur ne s'annulant pas, elle est de classe  $C^5$  sur  $[0, 1]$ .

**2.** Il suffit d'effectuer le changement de variable  $x = \sin^2 t$  dans l'intégrale.

**3.** D'après la question précédente et **V.4.**, on a  $4n^2 \int_0^1 \frac{T_n(x)}{1+x} f(x) dx = 4n^2 \int_0^{\pi/2} \cos(2nx)g(x) dx$  pour tout  $n \geq 1$ . Il suffit alors d'effectuer deux intégrations par parties successives sur cette dernière intégrale, en dérivant à chaque fois le facteur en  $g$ , pour obtenir la relation de l'énoncé.

**4.(i)** Il suffit d'écrire la relation du **3.** aux rangs  $n+2$  et  $n$ , puis de soustraire ces deux égalités.

**4.(ii)** Le calcul fait en 3., appliqué à  $g''$  au lieu de  $g$ , donne

$$4n^2 \int_0^{\pi/2} \cos(2nx)g''(x) dx = (-1)^n g^{(3)}\left(\frac{\pi}{2}\right) - g^{(3)}(0) - \int_0^{\pi/2} \cos(2nx)g^{(4)}(x) dx$$

soit  $4n^2 \int_0^{\pi/2} \cos(2nx)g''(x) dx = (-1)^n g^{(3)}\left(\frac{\pi}{2}\right) - g^{(3)}(0) + \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nx)}{2n} g^{(5)}(x) dx$  après une nouvelle intégration par parties.

Posons  $C_n = (-1)^n g^{(3)}\left(\frac{\pi}{2}\right) - g^{(3)}(0)$ . On a  $C_{n+2} = C_n$  donc, en écrivant la relation précédente au rang  $n+2$  et en utilisant **(i)**, on obtient après calculs  $U = \frac{C_n}{16} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+2)^2} \right) - \frac{V}{16}$ .

**4.(iii)** Tout d'abord,  $|C_n|$  peut être majoré par la constante  $|g^{(3)}(\pi/2)| + |g^{(3)}(0)|$  et, pour tout  $n \geq 1$ ,  $0 \leq \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+2)^2} = \frac{4(n+1)}{n^2(n+2)^2} \leq \frac{4}{n^2(n+2)} \leq \frac{4}{n^3}$ . Dans la relation précédente, le premier terme peut donc être majoré en module par un  $K_1/n^3$ .

D'autre part,  $|V| \leq \int_0^{\pi/2} \left( \frac{1}{n^3} + \frac{1}{(n+2)^3} \right) |g^{(5)}(x)| dx \leq \int_0^{\pi/2} \frac{2}{n^3} |g^{(5)}(x)| dx$ . La fonction  $g^{(5)}$  est continue donc bornée sur le segment  $[0, 1]$  ; si  $M$  majore  $|g^{(5)}|$  sur  $[0, 1]$ , on obtient donc  $|V| \leq \frac{\pi M}{n^3}$ .

On a donc  $|U| \leq \frac{K_1}{n^3} + \frac{|V|}{16} \leq \frac{K}{n^3}$  avec  $K = K_1 + \pi M/16$ .

**5.** On prend de nouveau pour  $f$  la fonction constante égale à 1, qui donne  $S_f = \ln 2$ .

Soit  $n \geq 1$ . On applique le **IV.1.** à  $Q_n$  (au rang  $n+2 = \deg Q_n$ ). Par linéarité de  $\varphi_{n+2}$  et de l'intégration, on obtient

$$\begin{aligned} U &= Q(-1) \ln 2 - (n+2)^2 \int_0^1 \varphi_{n+2}(T_{n+2})(x) dx + n^2 \int_0^1 \varphi_n(T_n)(x) dx \\ &= Q(-1) \ln 2 - (n+2)^2 S_{n+2} + n^2 S_n \end{aligned}$$

avec les notations du **IV.** En admettant provisoirement que  $Q_n(-1) \neq 0$ , on a donc

$$\ln 2 - \frac{(n+2)^2 S_{n+2} - n^2 S_n}{Q_n(-1)} = \frac{U}{Q_n(-1)}$$

Etudions donc les nombres  $Q_n(-1) = (n+2)^2 v_{n+2} - n^2 v_n$  avec les notations du **V.1.**. Notons déjà que la suite  $(v_n)$  est croissante : en effet  $v_0 \leq v_1$  et, si  $v_n \leq v_{n+1}$ , alors  $v_{n+2} = 6v_{n+1} - v_n \geq 5v_{n+1} \geq v_{n+1}$  puisque les  $v_n$  sont strictement positifs.

On en déduit  $Q_n(-1) = 6(n+2)^2 v_{n+1} - (n+2)^2 v_n - n^2 v_n \geq (5(n+2)^2 - n^2) v_n \geq 4n^2 v_n \geq 2n^2 (3+\sqrt{8})^n$ . Cela montre en particulier qu'on a bien  $Q_n(-1) \neq 0$ , et donc

$$\left| \ln 2 - \frac{(n+2)^2 S_{n+2} - n^2 S_n}{Q_n(-1)} \right| = \frac{|U|}{|Q_n(-1)|} \leq \frac{K}{2n^5 (3+\sqrt{8})^n}$$

Enfin on a déjà vu que les nombres  $S_n$  sont rationnels, et les nombres  $Q_n(-1)$  sont entiers puisque les  $v_n$  le sont ; donc les nombres  $q_n = \frac{(n+2)^2 S_{n+2} - n^2 S_n}{Q_n(-1)}$  sont bien rationnels.