DS5

Un peu de calculs

1. Soit $I = \displaystyle\int_{-2}^{0} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+8}}\mathrm{d}x$.

- **a.** Justifier l'existence de I.
- **b.** Déterminer des réels a, b, c tels que $x^2+4x+8 = a((bx+c)^2+1)$.
- **c.** Après justifications, effectuer le changement de variables $\dfrac{x}{2}+1 = \tan t$.
- **d.** Calculer I.

2. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

On évitera de faire un équivalent, mais on passera plutôt par un développement limité de $\dfrac{1}{1+x}$.

Exercice

Soit $I = [0,1]$ et $E = \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On munit E de la norme $||.||_\infty$ définie pour $f \in E$ par $||f||_\infty = \sup_{x\in I}\{|f(x)|\}$.
Soit $f \in E$. On pose $\forall x \in I, g(x) = \exp(-x)\displaystyle\int_0^x \exp(t)f(t)\mathrm{d}t$.

1.
- **a.** Démontrer que l'application $\phi : f \mapsto \phi(f) = g$ est un endomorphisme de E.
- **b.** Calculer $\exp(-x)\displaystyle\int_0^x \exp(t)\mathrm{d}t$.
- **c.** En déduire que l'application ϕ est continue de $(E, ||.||_\infty)$ dans $(E, ||.||_\infty)$.

2. On considère la suite de fonctions définie par $f_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, f_{n+1} = \phi(f_n)$.
- **a.** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x)| \leqslant (1-e^{-1})^n$.
- **b.** En déduire que la série $\sum f_n(x)$ est absolument convergente.
- **c.** Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_{n+1} est dérivable sur $[0,1]$ et exprimer $f'_{n+1}(x)$ en fonction de $f_n(x)$ et de $f_{n+1}(x)$.
- **d.** En déduire que la série $\sum f'_n(x)$ est convergente et calculer sa somme.

Problème 1 :

Dans tout le problème, les suites considérées sont à valeurs réelles.

Partie A

On considère la suite définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $a_{2n} - a_n \geqslant \frac{1}{2}$.

2. En déduire la nature de la suite (a_n).

3. Démontrer que $a_n - 1 \leqslant \ln n \leqslant a_n$ pour $n \geqslant 1$.

4. En déduire un équivalent de a_n au voisinage de $+\infty$.

5. On pose pour $n \geqslant 1$, $b_n = a_n - \ln n$. Montrer que la suite (b_n) est convergente.
On note γ sa limite.

6. Donner un équivalent de $a_n - \ln n - \gamma$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie B

À toute suite (u_n), on associe la suite (v_n) définie par

$$\forall n \geqslant 1, v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

On dit que la suite (u_n) converge au sens de Cesàro si la suite (v_n) converge.

1. Soit (u_n) une suite de limite nulle et $\varepsilon > 0$.

- **a.** Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n \geqslant n_0, \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n_0} u_k\right) - \varepsilon \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n_0} u_k\right) + \varepsilon.$$

- **b.** En déduire que la suite (v_n) converge vers 0.
- **c.** Énoncer puis démontrer la généralisation du résultat précédent au cas où (u_n) converge vers $\ell \neq 0$.

2. On considère la suite définie par $x_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_{n+1} = \dfrac{x_n(1+x_n)}{1+2x_n}$.

- **a.** Montrer que $\forall n \geqslant 2, 0 < x_n < 1$.
- **b.** Montrer que la suite (x_n) est décroissante.
- **c.** La suite (x_n) est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.
- **d.** Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} = \frac{1}{1+x_n}.$$

- **e.** Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \dfrac{1}{x_{n+1}} - \dfrac{1}{x_n}$ et $v_n = \dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k$.
  Montrer que (u_n) converge vers 1.
- **f.** Exprimer v_n en fonction de x_{n+1} et x_n et en déduire un équivalent de x_n au voisinage de $+\infty$.

3. On suppose qu'une suite (w_n) est telle que $(w_{n+1} - w_n)$ est convergente vers un nombre ℓ.

- **a.** Montrer que la suite $\left(\dfrac{w_n}{n}\right)$ converge et préciser sa limite.
- **b.** Étudier la nature de la suite (w_n) lorsque $\ell \neq 0$.
- **c.** Que peut-on dire dans le cas où $\ell = 0$?

4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Dans cette question, on pose pour $n \geqslant 1$, $u_n = \sin n\alpha$ et $v_n = \dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k$.

- **a.** Étudier la nature des suite (u_n) et (v_n) lorsque $\alpha \equiv 0[\pi]$.

b. Pour $n \geqslant 1$, on pose $c_n = \cos n\alpha$. Exprimer $u_{n+2} - u_n$ en fonction de c_{n+1} et $u_{n+2} + u_n$ en fonction de u_{n+1}.

c. On suppose dans cette question que $\alpha \not\equiv 0[\pi]$.

i. On fait l'hypothèse que la suite (u_n) converge. Démontrer que la suite (c_n) converge également et préciser les limites de (u_n) et de (c_n).

ii. Conclure quant à la convergente de la suite (u_n).

iii. Montre que la suite (v_n) converge et déterminer sa limite.

5. Dans cette question, on suppose que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) converge.

a. Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} \leqslant 2v_{2n} - v_n$

b. Établir la convergence de la suite (u_n) et préciser sa limite.

Problème 2 :

Dans tout ce problème, on fixe $d \in \mathbb{N}^*$.

Pour $x = (x_1, \dots x_d) \in \mathbb{R}^d$, on pose $\|x\|_2 = \big(\sum_{j=1}^{d} x_j^2\big)^{1/2}$

On définit $\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}^d | \, \|x\|_2 = 1\}$.
Pour $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$, on définit : $|||A||| = \sup_{x \in \mathcal{B}}(\|Ax\|_2)$.

1. Montrer que l'application $A \mapsto |||A|||$ est bien définie de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}_+$ et que cette application est une norme sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.

2. Soit A une matrice symétrique dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.

a. En utilisant une matrice orthogonale adaptée, montrer que $|||A||| = \sup_{\lambda \in Sp(A)} |\lambda|$ où $Sp(A)$ désigne l'ensemble des valeurs propres de A.

b. En déduire que $|Tr(A)| \leqslant d|||A|||$.

3. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.

a. Montrer que $|||AB||| \leqslant |||A||| |||B|||$.

b. Montrer que la série $\sum \dfrac{A^n}{n!}$ est convergente dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.
On note $\exp(A)$ sa somme.

c. Montrer que si A et B commutent, alors $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$.

4. On pose $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer les exponentielles de I, J, K et L.

b. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $M = \cos(\theta)J + \sin(\theta)K$. Montrer que $M^2 = I$.

c. En déduire que pour tout $s \in \mathbb{R}$, $\exp(-sM) = \operatorname{ch}(s)I - \operatorname{sh}(s)M$ et que $Tr(\exp(-sM)) = 2\operatorname{ch}(s)$.

5. Soit A un élément de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on considère la fonction $\phi_x : t \mapsto \exp(-tA)x$ définie sur $\mathbb{R}$.

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, ϕ_x est une fonction $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$ et qu'elle est l''unique solution de l'équation différentielle $y'(t) + Ay(t) = 0$ telle que $y(0) = x$.