DS5 un corrigé

Questions de cours

6.
Le discriminant du trinôme x^2+4x+8 est strictement négatif donc la fonction intégrée est bien définie et continue sur le segment $[-2,0]$ donc I existe.

Par une mise sous forme canonique on a pour tout x réel
$$x^2+4x+8=4\left(\left(\frac{x}{2}+1\right)^2+1\right)$$
L'application $t\mapsto 2\tan t-2$ est de classe C^1 et bijective de $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ sur $[-2,0]$ on peut donc poser $x=2\tan t-2$, on a alors $dx=2(1+\tan^2 t)dt$ et après changement de variable l'intégrale devient
$$I=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan t}{\sqrt{1+\tan^2 t}}(1+\tan^2 t)dt=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan t\sqrt{1+\tan^2 t}dt$$
Sur l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ on a
$$\sqrt{1+\tan^2 t}=\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}=\frac{1}{\sqrt{\cos^2 t}}=\frac{1}{|\cos t|}=\frac{1}{\cos t}$$
donc
$$I=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt$$
On a donc
$$I=2\left[\frac{1}{\cos t}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=2(\sqrt{2}-1)$$
7. Pour $n\geqslant 1$, $u_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})}=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}v_n$ où $v_n=\dfrac{1}{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}=1-\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+O(\dfrac{1}{n})$.
Alors : $u_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{n}+O(\dfrac{1}{n\sqrt{n}})$.
La première expression est le terme général d'une série alternée, donc convergente par critère spécial des séries alternées.
La seconde expression est le terme général de la série harmonique divergente.
La troisième expression est le terme général d'une série de Riemann avec $\alpha=3/2>1$, donc convergente.
Finalement, la série de terme général u_n est divergente.
8. Puisque $1+X^3=(1+X)(1-X+X^2)$, le coefficient de $1/(1+X)$ dans la décomposition en éléments simples de $1/(1+X^3)$ vaut $[1/(1-X+X^2)](-1)=1/3$. On a alors
$$\frac{1}{1+X^3}-\frac{1}{3(1+X)}=-\frac{X^2-X-2}{3(X^3+1)}=-\frac{X-2}{3(X^2-X+1)}=-\frac{X-1/2}{3(X^2-X+1)}+\frac{1}{2(X^-X+1)}$$
qui est la décomposition proposée par l'énoncé avec $a=1/3$, $b=-1/6$ et $c=1/2$.
On a alors $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\ln 2$, $\displaystyle\int_0^1\frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx=[\ln(x^2-x+1)]_0^1=0$ et enfin, en utilisant $\displaystyle\int\frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{Arctan}\frac{t}{a}$: $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{x^2-x+1}=\int_0^1\frac{dx}{(x-1/2)^2+3/4}=\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]_0^1=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. On en déduit $\quad I=a\ln 2+c\,\dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}=\dfrac{\ln 2}{3}+\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

Exercice 1

On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On munit E de la norme $||.||_\infty$ définie pour $f \in E$ par $||f||_\infty = \sup_{x\in[0,1]}\{|f(x)|\}$.
Soit $f \in E$. On pose $\forall x \in I, g(x) = \exp(-x)\displaystyle\int_0^x \exp(t)f(t)\mathrm{d}t$.
On note ϕ l'application $\phi : f \mapsto \phi(f) = g$.

1. **a.** Soient f, g deux fonctions continues sur I et λ réel. Alors pour tout réel $x \in [0,1]$, $\phi(\lambda f+g)(x) = \exp(-x)\int_0^x \exp(t)(\lambda f(t)+g(t))\mathrm{d}t = \lambda\phi(f)(x)+\phi(g)(x)$ par linéarité de l'intégrale.

   Donc φ est linéaire.

   De plus, la fonction $x \mapsto \phi(f)(x)$ est continue sur I, donc ϕ est un endomorphisme de E.

   b. $\exp(-x)\displaystyle\int_0^x \exp(t)\mathrm{d}t = 1-\exp(-x)$.

   c. On en déduit que $\forall f \in E, ||\phi(f)||_\infty \leqslant (1-e^{-1})\cdot||f||_\infty$ donc l'application linéaire est lipschitzienne donc ϕ est continue de $(E, ||.||_\infty)$ dans $(E, ||.||_\infty)$.

2. **a.** On a $||\phi(f_n)||_\infty = ||f_{n+1}||_\infty \leqslant (1-\exp(-1))||f_n||_\infty$ donc par récurrence (à rédiger) $||f_n||_\infty \leqslant (1-\exp(-1))^n||f_0||_\infty = (1-\exp(-1))^n$ donc pour tout $x\in\mathbb{R}$, $|f_n(x)| \leqslant (1-e^{-1})^n$.

   b. Par théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum f_n(x)$ est absolument convergente.

   c. Soit $n\in\mathbb{N}$. f_{n+1} est un produit de fonctions dérivables par théorème fondamental de l'analyse (car $t\mapsto \exp(t)f_n(t)$ est continue) donc f_{n+1} est dérivable sur $[0,1]$ et par dérivation du produit, $f'_{n+1}(x) = -\exp(-x)\int_0^x \exp(t)f_n(t)\mathrm{d}t + \exp(-x)(\exp(x)f_n(x)) = f_n(x) - f_{n+1}(x)$ en fonction de $f_n(x)$ et de $f_{n+1}(x)$.

   d. La série $\sum f'_n(x)$ est donc une série télescopique et convergente car $\lim f_n = 0$. De plus, sa somme vaut $\sum_{n=0}^{+\infty}(f_n(x)-f_{n+1}(x) = f_0(x) = 1$.

Problème :

Partie 1 : étude des espaces $E_n(a)$.

1. Soit $f\in E, a\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$.

   D'après la formule de Taylor-Young pour une fonction de classe C^n, que la fonction f appartient à $E_n(a)$ si et seulement si $f(x)-f(a) = \sum_{k=1}^n \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n) = 0 + o((x-a)^n)$ ce qui est vrai si et seulement si $\forall k\in[1,n]$, $\dfrac{f^{(k)}(a)}{k!} = 0$ par unicité des coefficients du DL de f en a.

   Finalement, $f\in E_n(a)$ si et seulement si pour tout entier k compris entre 1 et n, la dérivée d'ordre k de f en a est nulle.

2. Un exemple de fonction ultraplate en 0.

   Pour tout $x>0$, on pose $b(x) = \exp(-(\ln x)^2)$.

   a. La fonction b est bien définie sur $]0,+\infty[$ et de classe C^∞ par composition de fonctions de classe C^∞.

   $b'(x) = -2\dfrac{\ln x}{x}\exp(-(\ln x)^2)$ et $b''(x) = -2\left(\dfrac{-2\ln^2 x}{x^2} - \dfrac{\ln x+1}{x^2}\right)\exp(-(\ln x)^2)$

   $= -2\left(\dfrac{-2\ln^2 x - \ln x + 1}{x^2}\right)\exp(-(\ln x)^2)$.

En posant $X = \ln x$, le polynôme $-2X^2 - X + 1 = (1+X)(1-2X)$ s'annule et change de signe en (-1) et en $1/2$, donc pour $\ln x = (-1)$ $\ln x = 1/2$ donc pour $x \in \{e^{-1}, \sqrt{e}\}$.

Plus précisément, b est croissante jusqu'à 1 puis décroissante et admet deux points d'inflexion en e^{-1} et $\sqrt{e}$.

b. La fonction b est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ par composition de fonctions de classe C^∞ et par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme $B_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$\forall x > 0, b^{(n)}(x) = \frac{B_n(\ln x)}{x^n} \exp(-(\ln x)^2).$$

Hérédité : $b^{(n+1)}(x) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\dfrac{B_n(\ln x)}{x^n} \exp(-(\ln x)^2))$
$= \exp(-(\ln x)^2) \left(\dfrac{-2\ln x}{x} \dfrac{B_n(\ln x)}{x^n} + \dfrac{B_n'(\ln x)/x}{x^n} - n\dfrac{B_n(x)}{x^{n+1}} \right)$
$= \exp(-(\ln x)^2) \left(\dfrac{-2\ln x B_n(\ln x) + B_n'(\ln x) - nB_n(\ln x)}{x^{n+1}} \right)$
On pose donc $B_{n+1}(X) = -2XB_n(X) + B_n'(X) - nB_n(X)$ dont le terme dominant est $(-2)^n X^n$ par récurrence et opération sur les degrés.

c. On rappelle les croissances comparées : $\lim_{X\to\pm\infty} X^n \exp(-X^2) = 0$. Si x tend vers 0^+, alors $X = \ln x$ tend vers $-\infty$. Donc $b^{(n)}(x) = \dfrac{B_n(\ln x)}{\exp(n \ln x)} \exp(-(\ln x)^2) = B_n(\ln x)\exp(-n\ln x - (\ln x)^2) = B_n(\ln x)\exp(-(\ln x)^2(1 + \frac{n}{\ln x}))$
Ainsi, $b^{(n)}(x) = B_n(\ln x)\exp(-(\ln x)^2)\exp(1 + \frac{n}{\ln x})$.

Le dernier terme tend vers e lorsque x tend vers 0^+. Le reste tend vers 0 par les croissances comparées rappelées précédemment.

L'ensemble tend donc vers 0 en 0^+. Donc b est ultraplate en 0^+. Par parité la fonction c est de classe C^∞ par théorème du prolongement de classe C^n puisque toutes ses dérivées tendent vers 0 en 0. Par ailleurs, c est ultraplate car $c^{(n)}(0) = 0$ pour tout n.

d. Par parité, la fonction c admet une dérivée nulle en (-1) et en 1. Comme $b''(1) \neq 0$, la fonction est plate d'ordre 1 en (-1) et en 1.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Soient f et g dans $E_n(a)$. Alors pour $k \in [1, n]$, $(\lambda f + g)^{(k)}(a) = \lambda f^{(k)}(a) + g^{(k)}(a) = 0 + 0$ donc $\lambda f + g$ est ultraplate en a

De plus, d'après le formule de Leibniz, $(fg)^k(a) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} f^{(j)}(a) g^{(k-j)}(a) = 0$ car soit $j \geqslant 1$, soit $k - j \geqslant 1$. Donc fg est ultraplate en a.

Finalement, $E_n(a)$ est bien une sous algèbre de E.

b. L'ensemble $E_n(0)$ n'est pas un idéal de l'anneau commutatif E. Si $f \in E_n(0)$ telle que $f(0) = 1$ (par exemple $f = b + 1$) et g est une fonction telle que $g^{(n)}(0) = 1$ (par exemple $g = \exp$), alors $(fg)^{(n)}(0) = 1 \cdot 1 + 0 = 1 \neq 0$. Donc fg n'est pas ultraplate en 0.

L'ensemble $E_n(a)$ n'est donc pas absorbant.

c. f est ultraplate en 0 si et seulement si les dérivées de f sont toutes nulles en 0, si et seulement si les dérivées de $g : x \mapsto f(x - a)$ sont toutes nulles en a, si et seulement si g est ultraplate en a.

4. On a vu que $E_n(0)$ n'est pas un idéal. Par contre, si f est dans $E_n(0)$ et f n'annule en 0, alors pour tout $g \in E$, $fg \in E_n(0)$ en utilisant la formule de Leibniz.

Soit alors $b_a = \exp(-(\ln|x - a|)^2)$. Alors $b_a(a) = 0$ et b_a est ultraplate en a.

Alors $c = b_{-1} \cdot b_0 \cdot b_1$ est ultraplate à la fois en (-1), en 0 et en 1.

Exercice 3

1. C'est la formule pour la somme des termes d'une suite géométrique de raison $-x \neq -1$.
2. Il suffit d'intégrer l'égalité précédente sur le segment borné par 0 et x, sur lequel toutes les fonctions concernées sont continues.
3. On rappelle que $x \in]-1,1]$

1. 1er cas : si $x < 0$:
Pour $t \in [x,0]$, $\left|\dfrac{t^n}{1+t}\right| \leqslant \dfrac{|t|^n}{1+x}$. En intégrant cette inégalité entre 0 et x, on obtient :
$$|I_n(x)| = \left|\int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt\right| \leqslant \int_x^0 \left|\frac{t^n}{1+x}\right| dt = \frac{1}{1+x}\int_x^0 (-t)^n dt \leqslant \frac{1}{1+x}\frac{[(-t)^{n+1}]_0^x}{n+1} \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(x+1)}$$
qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

2. 2ème cas : si $0 \leqslant x \leqslant 1$: cette fois, pour $t \in [x,0]$, $\left|\dfrac{t^n}{1+t}\right| \leqslant |t|^n$ car $1+x \geqslant 1$. En intégrant entre 0 et x, on trouve que
$$|I_n(x)| \leqslant d\int_0^x t^n dt = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$ qui tend aussi vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$

Dans tous les cas, par théorème des gendarmes, $|I_n(x)|$ tend vers 0.
4. D'après l'égalité du **2.**, il suffit de montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t}\,dt$ a pour limite 0 quand n tend vers $+\infty$.
En (-1), le terme général $\dfrac{(-1)^{i-1}}{i}(-1)^i = \dfrac{1}{i}$ est celui de la série harmonique qui est divergente.
5. La relation (1) s'en déduit en prenant $x = 1$; la (2) en prenant $x = -1/2$.
6.a C'est le théorème sur les séries alternées.
On a, pour tout $p \geqslant 1$, $\quad S_{p+2} - S_p = (-1)^{p+1}(u_{p+2} - u_{p+1})$, du signe de $(-1)^p$ puisque la suite (u_n) décroît.
En prenant $p = 2n$ (respectivement $2n-1$), on en déduit la croissance de la suite (S_{2n}) (respectivement la décroissance de (S_{2n-1})).
La suite (S_{2n}) croît, donc est majorée par sa limite S ; de même pour l'autre inégalité.
6.b On en déduit, pour tout $p \geqslant 1$: $\quad 0 \leqslant S - S_{2p} \leqslant S_{2p-1} - S_{2p} = u_{2p}$ et $0 \leqslant S_{2p-1} - S \leqslant S_{2p-1} - S_{2p} = u_{2p} \leqslant u_{2p-1}$ ce qui fournit le résultat demandé pour tout $n \geqslant 1$, pair ou impair.
7. On applique les résultats du **6.** avec $u_n = 1/n$. On a alors, avec les notations du **6.** et grâce à la relation (1), $\quad |\ln(2) - S_n| \leqslant \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \geqslant 1$. On peut donc prendre $N_p = 10^p$.
8.a On a pour tout $n \geqslant 1$: $\quad 0 \leqslant R_n \leqslant \displaystyle\sum_{i=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}}\frac{1}{1-1/2} = \frac{1}{2^n}$ (en posant $k = i-(n+1)$).
8.b Puisque $R_n = \ln(2) - \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i2^i}$ et que $R_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}$, il suffit d'avoir $\quad \dfrac{1}{2^{N'_p}} \leqslant 10^{-p}$ soit $\quad N'_p \geqslant \dfrac{\ln 10}{\ln 2}\,p$.
Si on tient vraiment à un entier, on peut donc prendre $\quad N'_p = 1 + \lfloor \dfrac{\ln 10}{\ln 2}\,p \rfloor$.
8.c N_p dépend exponentiellement de p, alors que N'_p est majoré par $2 + \dfrac{\ln 10}{\ln 2}\,p$, fonction affine ; les croissances comparées montrent que N_p tend beaucoup plus vite que N'_p vers $+\infty$.