# DS5

## Questions de cours

**1.** Soit $f$ linéaire de $E$ dans $F$. Énoncer un maximum de conditions suffisantes permettant de montrer que $f$ est continue en précisant le cas échéant celles qui sont nécessaires.

**2.** Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires pour une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Quel est son équivalent vectoriel ?

**3.** Énoncer le théorème des bornes atteintes pour une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Quel est son équivalent vectoriel ?

**4.** Rappeler la définition d'une fonction uniformément continue sur un intervalle $I$.
Donner l'exemple d'une fonction uniformément continue non lipschitzienne.

**5.** Énoncer le théorème de l'intégrale nulle.

**6.** Soit $I = \displaystyle\int_{-2}^{0} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+8}} \mathrm{d}x$.

- **a.** Justifier l'existence de $I$.
- **b.** Déterminer des réels $a, b, c$ tels que $x^2 + 4x + 8 = a((bx+c)^2 + 1)$.
- **c.** Après justifications, effectuer le changement de variables $\dfrac{x}{2} + 1 = \tan t$.
- **d.** Calculer $I$.

**7.** Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.

*On évitera de faire un équivalent, mais on passera plutôt par un développement limité de* $\dfrac{1}{1+x}$.

**8.** Déterminer des nombres réels $a, b, c$ tels que

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{a}{1+x} + \frac{b(-1+2x)}{1-x+x^2} + \frac{c}{1-x+x^2}$$

et calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$.

## Exercice 1

On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On munit $E$ de la norme $||.||_\infty$ définie pour $f \in E$ par $||f||_\infty = \sup_{x\in[0,1]}\{|f(x)|\}$.
Soit $f \in E$. On pose $\forall x \in I, g(x) = \exp(-x) \displaystyle\int_0^x \exp(t) f(t) \mathrm{d}t$.

**1.**
- **a.** Démontrer que l'application $\phi : f \mapsto \phi(f) = g$ est un endomorphisme de $E$.
- **b.** Calculer $\exp(-x) \displaystyle\int_0^x \exp(t) \mathrm{d}t$ .
- **c.** En déduire que l'application $\phi$ est continue de $(E, ||.||_\infty)$ dans $(E, ||.||_\infty)$.

**2.** On considère la suite de fonctions définie par $f_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, f_{n+1} = \phi(f_n)$.

- **a.** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x)| \leqslant (1 - e^{-1})^n$.

**b.** En déduire que la série $\sum f_n(x)$ est absolument convergente.

**c.** Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}$ est dérivable sur $[0, 1]$ et exprimer $f'_{n+1}(x)$ en fonction de $f_n(x)$ et de $f_{n+1}(x)$.

**d.** En déduire que la série $\sum f'_n(x)$ est convergente et calculer sa somme.

# Exercice 2 :

Étant donné un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un réel $a$, on dit qu'une fonction réelle $f$ définie au voisinage de $a$ est *plate à l'ordre $n$ en $a$* lorsque $f(x) - f(a)$ est négligeable devant $(x - a)^n$ mais pas devant $(x - a)^{n+1}$ lorsque $x$ tend vers $a$.
On dit que $f$ est *ultraplate en $a$* lorsque $f(x) - f(a)$ est négligeable devant $(x - a)^m$ lorsque $x$ tend vers $a$, quel que soit l'entier naturel $m$.

## Étude des espaces $E_n(a)$.

On note $E$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de classe $C^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dont on rappelle qu'il possède aussi une structure d'anneau commutatif et d'algèbre.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel $a$, on note $E_n(a)$ l'ensemble des fonctions de $E$ telles que la différence $f(x) - f(a)$ soit négligeable devant $(x - a)^n$ lorsque $x$ tend vers $a$.

**1.** Soit $f \in E, a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
Démontrer, en utilisant une formule de Taylor, que la fonction $f$ appartient à $E_n(a)$ si et seulement si pour tout entier $k$ compris entre 1 et $n$, la dérivée d'ordre $k$ de $f$ en $a$ est nulle :

$$f \in E_n(a) \Leftrightarrow \forall k \in [1, n], f^{(k)}(a) = 0.$$

**2.** Un exemple de fonction ultraplate en 0.
Pour tout $x > 0$, on pose $b(x) = \exp(-(\ln x)^2)$.

**a.** Étudier la fonction $b$, donner l'allure du graphe de $b$ en précisant les coordonnées de ses points d'inflexion (les points où la dérivée seconde change de signe).

**b.** Justifier que $b$ est de classe $C^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme $B_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$\forall x > 0, b^{(n)}(x) = \frac{B_n(\ln x)}{x^n} \exp(-(\ln x)^2).$$

(on précisera le degré et le coefficient du monôme dominant de $B_n$).

**c.** En déduire que la fonction $c : x \mapsto \begin{cases} b(|x|) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est ultraplate en 0.

**d.** En quels autres points est-elle plate et à quel ordre ?

**3.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

**a.** Montrer que pour tout réel $a$, $E_n(a)$ est une sous-algèbre de $E$.

**b.** L'ensemble $E_n(a)$ est-il un idéal de l'anneau commutatif $E$ ?

**c.** Montrer que si $f$ est ultraplate en 0, alors $g : x \mapsto f(x - a)$ est ultraplate en $a$.

**4.** Construire à l'aide de la fonction $c$ définie plus haut une fonction de $E$ ultraplate à la fois en 0, en $+1$ et en $-1$.

## Exercice 3

Soit $x$ un nombre réel dans $]-1,1]$.

**1.** Soit $n$ un entier naturel non nul. Démontrer l'égalité :

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i x^i + \frac{(-1)^n x^n}{1+x}.$$

**2.** En déduire l'égalité

$$\ln(1+x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{i} x^i + \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t} dt.$$

**3.** Montrer que $I_n = \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt$ tend vers 0 lorsque $n$ tend vers $+\infty$ en utilisant le théorème des gendrames.

**4.** Démontrer que pour tout $x \in ]-1,1]$, la série $\sum \dfrac{(-1)^{i-1}}{i} x^i$ converge vers $\ln(1+x)$.
Que se passe-t-il en $(-1)$ ?

**5.** En choisissant judicieusement deux réels de $]-1,1]$, démontrer successivement les égalités

$$\ln 2 = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i} \text{ et } \ln 2 = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i2^i}$$

**6.** Soit $(u_n)_{n \geqslant 1}$ une suite décroissante de nombres réels qui converge vers 0.

**a.** Soit $S_n$ la somme partielle $\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}u_i$, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

i. Démontrer que la suite $(S_{2n})_{n \geqslant 1}$ est croissante et que la suite $(S_{2n-1})_{n \geqslant 1}$ est décroissante.

ii. Justifier que la série de terme général $(-1)^{n-1}u_n$ converge. On note $S$ sa somme.

iii. Démontrer que $S$ vérifie, pour tout entier naturel $n$, l'encadrement :

$$S_{2n} \leqslant S \leqslant S_{2n-1}.$$

**b.** En déduire pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, l'inégalité :

$$|S - S_n| \leqslant u_n.$$

**7.** Soit $p$ un entier naturel. Déterminer un entier naturel $N_p$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{(-1)^{i-1}}{i}$ soit une valeur approchée de $\ln 2$ à $10^{-p}$ près, pour tout entier naturel $n \geqslant N_p$.

**8.** Soit $p$ un entier naturel. On se propose de calculer une valeur de $\ln 2$ à $10^{-p}$ près en utilisant les sommes partielles $(\sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{i2^i})_{n \geqslant 1}$.

**a.** Pour un entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $R_n = \sum_{i=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{i2^i}$. Justifier l'inégalité :

$$0 \leqslant R_n \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

**b.** Déterminer un entier naturel $N'_p$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{i2^i}$ est une valeur approchée de $\ln 2$ à $10^{-p}$ près, pour tout entier naturel $n \geqslant N'_p$.

**c.** Comparer les ordres de grandeurs de $N_p$ (introduit dans la question 7) et $N'_p$.