Devoir surveillé 5

Noël - 4j
L'usage des calculatrices n'est pas autorisé

Vous attacherez la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction, même si tout résultat qui n'est pas explicitement dans le cours de MPSI ou de MP doit être démontré. Si vous repèrez ce qui semble être une erreur d'énoncé, signalez le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.

Consignes à respecter sous peine d'être pénalisé :

- Utiliser des copies doubles.
- Changer de feuille/copie à chaque exercice ou partie d'un problème.
- Faire clairement apparaître le numéro (et le cas échéant la partie) de la question traitée.
- Souligner les résultats intermédiaires dans une démonstration à tiroirs.
- Faire une phrase de conclusion répondant clairement à la/les question(s) posées, et encadrer le résultat.

Exercice :

1. **a.** Montrer que la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente.

b. Justifier proprement que $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{n} + (-1)^n n^{-3/2} + o\left(n^{-3/2}\right)$.

c. Étudier la nature de la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

d. Qu'a-t-on voulu mettre en évidence dans cet exemple ?

2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour $p \geq 1$ et $q \geq 1$, on pose $a_{p,q} = \dfrac{1}{(p+q)^a}$.

Déterminer la nature de $\sum_p \sum_q \dfrac{1}{(p+q)^a}$ en discutant de la valeur du paramètre a.

Problème :

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie par $a_n = \frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t}$.
Ce problème étudie la série de terme général a_n. On montre d'abord qu'elle est convergente et on donne différentes représentations de sa somme, notée γ qui est appelée **constante d'Euler**.
Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $S_n = \sum_{p=1}^{n} a_p$.
Soit enfin $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $H_0 = 0$ et pour tout entier $n \geq 1$, $H_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$.

Partie 1 : première approche de la constante d'Euler

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. En encadrant l'intégrale $\int_p^{p+1} \frac{\mathrm{d}t}{t}$, montrer que

$$0 \leq a_p \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

2. En déduire que la suite (S_n) est convergente et que sa limite γ appartient à l'intervalle $[0,1]$.

3. Vérifier que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$a_p = \frac{1}{p}\int_0^1 \frac{t}{t+p}\mathrm{d}t,$$

puis montrer que pour tout entier $p \geq 2$, on a :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) \leq a_p \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right).$$

4. En déduire un encadrement de $S_m - S_n$ pour m et n des entiers vérifiant $1 \leq n < m$, puis montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\frac{1}{2n+2} \leq \gamma - S_n \leq \frac{1}{2n}.$$

5. Conclure qu'on a le développement asymptotique suivant pour la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o(1/n).$$

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n = S_n + \frac{1}{2n+2}$. Montrer que

$$0 \leq \gamma - T_n \leq \frac{1}{2n(n+1)}$$

Partie 2 : deux représentations intégrales de γ

1. a. Montrer que les deux intégrales suivantes sont convergentes :

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\mathrm{d}t \text{ et } \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t.$$

b. Déterminer la limite de $\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}$ lorsque t tend vers 0^+.

c. En déduire que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}}-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$$

est convergente.

2. Dans cette question, on veut démontrer que si a et b sont deux réels strictement positifs, alors la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et que

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\mathrm{d}t = \ln\frac{b}{a}.$$

Soient x et y deux réels strictement positifs.

a. Démontrer que

$$\int_x^y \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\mathrm{d}t = \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t - \int_{ay}^{by} \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t.$$

b. Montrer que pour $a \leq b$, on a pour tout réel $z > 0$:

$$e^{-bz}\ln\frac{b}{a} \leq \int_{az}^{bz} \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t \leq e^{-az}\ln\frac{b}{a}.$$

c. Montrer finalement que

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\mathrm{d}t = \ln\frac{b}{a}.$$

3. Une première formule intégrale pour γ :

a. Justifier que pour tout réel $t > 0$, on a :

$$\frac{1}{1-e^{-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt} \text{ et } \frac{1}{t} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{e^{-nt}-e^{-(n+1)t}}{t}\right).$$

b. En déduire que pour tout réel $t > 0$, on a :

$$e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}}-\frac{1}{t}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{-(n+1)t} - \frac{e^{-(n+1)t}-e^{-(n+2)t}}{t}\right).$$

c. Justifier que pour tout $t > 0$, $1 - \dfrac{1-e^{-t}}{t} \geq 0$.

d. Retrouver alors la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}}-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$ et démontrer l'égalité :

$$\gamma = \int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}}-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$$

4. Une deuxième représentation intégrale de γ :

Soit $y > 0$.

a. Calculer $\displaystyle\int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\mathrm{d}t$ puis en déduire que

$$\lim_{y\to 0^+}\left(\ln y + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\mathrm{d}t\right) = 0$$

b. Démontrer que

$$\gamma + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t = \int_0^y e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}}-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\mathrm{d}t.$$

c. En déduire que :

$$\lim_{y\to 0^+}\left(\gamma+\ln y+\int_y^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t\right)=0.$$

d. Démontrer que la fonction $t\mapsto e^{-t}\ln t$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et que :

$$\int_0^{+\infty}e^{-t}\ln t\mathrm{d}t=\lim_{y\to 0^+}\left(e^{-y}\ln y+\int_y^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t\right).$$

e. Conclure alors que $\gamma=-\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t}\ln t\mathrm{d}t$.

Partie 3 : pour une valeur approchée de γ :

1. **a.** Démontrer l'égalité suivante :

$$\int_0^1\left(\frac{1}{t}-\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\right)\mathrm{d}t=\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\mathrm{d}t$$

(on pourra calculer chacune des deux intégrales)

b. En utilisant l'égalité obtenue en **II.3)d)**, démontrer que :

$$\gamma=\int_0^1\frac{1-e^{-t}}{t}\mathrm{d}t-\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t.$$

2. Soit F la fonction définie par $F(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{H_k}{k!}x^k$.

(on rappelle que $H_0=0$ et pour $k\geq 1$, $H_k=\displaystyle\sum_{p=1}^{k}\frac{1}{p}$)

a. Montrer que F est définie.

On admet que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'on peut dériver terme à terme.

b. Démontrer que pour tout réel $x>0$, on a :

$$F'(x)-F(x)=\frac{1}{x}(e^x-1).$$

c. Montrer alors que pour tout réel $x>0$ on a :

$$F(x)=e^x\int_0^x\frac{1-e^{-t}}{t}\mathrm{d}t.$$

3. Déduire des questions précédentes que pour tout réel $x>0$, on a :

$$\gamma+\ln x=e^{-x}F(x)-\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t.$$

4. Soit un entier $n\geq 1$ et un entier $a\geq 2$. Montrer que :

$$\sum_{k=an+1}^{+\infty}\frac{H_k}{k!}n^k\leq\frac{n^{an+1}}{(an)!}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^k\leq\frac{a}{a-1}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi a}}\left(\frac{e}{a}\right)^{an}.$$

On pourra admettre que $n!\geq\sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

5. En déduire que pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$\left|\gamma+\ln n-e^{-n}\sum_{k=0}^{an}\frac{H_k}{k!}n^k\right|\leq\frac{a}{a-1}\frac{e^{-n}\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi a}}\left(\frac{e}{a}\right)^{an}+\frac{e^{-n}}{n}$$

6. Écrire une fonction `calcul(epsilon)` en langage Python qui renvoie une valeur approchée de γ à $\varepsilon>0$ près fixé.