Vendredi 1 décembre 2017
L'usage des calculatrices n'est pas autorisé

Consignes à respecter sous peine d'être pénalisé :
• Changer de copie (ou au moins de feuille) à chaque exercice ou partie d'un problème.
• Numéroter les questions (et le cas échéant la partie).
• Souligner les résultats intermédiaires dans une démonstration à tiroirs, faire une phrase de conclusion et encadrer le résultat.

Questions de cours

Exercice 1

On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On munit E de la norme $||.||_\infty$ définie pour $f \in E$ par $||f||_\infty = \sup_{x\in[0,1]}\{|f(x)|\}$.

Soit $f \in E$. On pose $\forall x \in I, g(x) = \exp(-x)\displaystyle\int_0^x \exp(t)f(t)\,\mathrm{d}t$.

On note ϕ l'application $\phi : f \mapsto \phi(f) = g$.

1. **a.** Soient f, g deux fonctions continues sur I et λ réel. Alors pour tout réel $x \in [0,1]$, $\phi(\lambda f + g)(x) = \exp(-x)\int_0^x \exp(t)(\lambda f(t) + g(t))\,\mathrm{d}t = \lambda\phi(f)(x) + \phi(g)(x)$ par linéarité de l'intégrale.
   Donc φ est linéaire.
   De plus, la fonction $x \mapsto \phi(f)(x)$ est continue sur I, donc ϕ est un endomorphisme de E.

   b. $\exp(-x)\displaystyle\int_0^x \exp(t)\,\mathrm{d}t = 1 - \exp(-x)$.

   c. On en déduit que $\forall f \in E, ||\phi(f)||_\infty \leq (1 - e^{-1}) \cdot ||f||_\infty$ donc l'application linéaire est lipschitzienne donc ϕ est continue de $(E, ||.||_\infty)$ dans $(E, ||.||_\infty)$.

2. **a.** On a $||\phi(f_n)||_\infty = ||f_{n+1}||_\infty \leq (1 - \exp(-1))||f_n||_\infty$ donc par récurrence (à rédiger) $||f_n||_\infty \leq (1 - \exp(-1))^n||f_0||_\infty = (1 - \exp(-1))^n$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x)| \leq (1 - e^{-1})^n$.

   b. Par théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum f_n(x)$ est absolument convergente.

   c. Soit $n \in \mathbb{N}$. f_{n+1} est un produit de fonctions dérivables par théorème fondamental de l'analyse (car $t \mapsto \exp(t)f_n(t)$ est continue) donc f_{n+1} est dérivable sur $[0,1]$ et par dérivation du produit, $f'_{n+1}(x) = -\exp(-x)\int_0^x \exp(t)f_n(t)\,\mathrm{d}t + \exp(-x)(\exp(x)f_n(x)) = f_n(x) - f_{n+1}(x)$ en fonction de $f_n(x)$ et de $f_{n+1}(x)$.

   d. La série $\sum f'_n(x)$ est donc une série télescopique et convergente car $\lim f_n = 0$. De plus, sa somme vaut $\sum_{n=0}^{+\infty}(f_n(x) - f_{n+1}(x) = f_0(x) = 1$.

Exercice 2

Soit $O_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : M^tM = I_n\}$.

1. Montrons que $(O_n(\mathbb{R}), \times)$ est un sous groupe multiplicatif de $GL_n(\mathbb{R})$.
   Effectivement,
   — si $M \in O_n(\mathbb{R})$, alors M est inversible d'inverse ${}^tM$ par définition donc $O_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$
   — $O_n(\mathbb{R})$ contient le neutre I donc n'est pas vide.
   — si M_1 et M_2 sont dans $O_n(\mathbb{R})$, alors $(M_1M_2^{-1}) \cdot^t (M_1M_2^{-1}) = (M_1M_2^{-1}) \cdot^t M_2^{-1} \cdot^t M_1$.
   Remarquons que $(M_2^{-1})^tM_2^{-1})^{-1} =^t M_2M_2 = I$ car ${}^tM_2$ est l'inverse de M_2.
   Finalement, $(M_1M_2^{-1}) \cdot^t (M_1M_2^{-1}) = I$, donc $(M_1M_2^{-1}) \in O_n(\mathbb{R})$.

Finalement, $O_n(\mathbb{R})$ est un sous groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.

Pour une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients $m_{i,j}$, on pose $||M|| = \max_{(i,j)\in[1,n]^2} |m_{i,j}|$. On admet que $||.||$ est une norme.

2. Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$. Alors $M^tM = I$ signifie par exemple que les lignes forme une famille orthonormale pour le produit scalaire canonique de R^n. En particulier, pour tout entier $i \in [1,n]$, $\sum_{j=1}^n m_{i,j}^2 = 1$. Donc $\forall (i,j), m_{i,j}^2 \leq 1$, c'est à dire $|m_{i,j}| \leq 1$.
Alors $||M|| \leq 1$.

3. On en déduit que $O_n(\mathbb{R})$ est un borné de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est un espace de dimension finie. De plus, $O_n(\mathbb{R})$ est la préimage du fermé $\{I_n\} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par l'application $\varphi : M \mapsto M^tM$ qui est continue car ses fonctions composantes sont toutes polynomiales en les coordonnées).

Donc $O_n(\mathbb{R})$ est un fermé et borné en dimension finie, donc compact.

4. Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$. Alors $\det(M^tM) = \det(M)\det({}^tM) = (\det(M))^2 = \det(I_n) = 1$. Donc $|\det(M)| = 1$

5. L'ensemble $O_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs dès que $n \geq 2$. En effet, la matrice de diagonale $(-1, 1, \dots 1)$ est dans $O_n(\mathbb{R})$ (de déterminant -1) et la matrice I_n aussi (de déterminant 1).

Si par l'absurde $O_n(\mathbb{R})$ était connexe par arcs, son image par la fonction det (continue car ses applications composantes sont toutes polynomiales en les coordonnées ou parce que multilinéaire en dimension finie) devrait être connexe par arcs par théorème des valeurs intermédiaires. Or $\det(O_n(\mathbb{R})) = \{-1, 1\}$ pour $n \geq 2$ n'est manifestement pas connexe par arcs.

6. a. Soit $M \in O_2(\mathbb{R})$ telle que $\det(M) = 1$. Après calculs, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $M = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$

(voir aussi le paragraphe sur les isométries directes du plan).

b. Soit alors $\varphi : \theta \in \mathbb{R} \mapsto M_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Par construction, $SO_2(\mathbb{R}) = \varphi([0, 2\pi[)$ est l'image d'un connexe par arcs (intervalle de $\mathbb{R}$) par une application continue, donc connexe par arcs.

7. On note $SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix} : (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}$.

a. L'ensemble $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ est connexe par arcs. : soient u et v dans $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$. Si u et v ne sont pas $\mathbb{R}_-$-colinéaires, alors le segment $[u, v]$ est inclus dans $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ et fournit un chemin continu entre u et v.

Si u et v sont $\mathbb{R}_-$ colinéaires, il existe w non colinéaire avec u. Alors u et w ne sont pas $\mathbb{R}_-$ colinéaires donc dans la même composante connexe, de même pour v et w. Comme les composantes connexes sont des classes d'équivalence, u et v sont donc dans la même composante connexe dans $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$.
Finalement$\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ est donc connexe par arcs.

b. La fonction $\varphi : \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \to S$ telle que $\varphi(x) = \dfrac{1}{||x||}x$ est continue par produit de fonctions continues. Comme $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ est connexe par arcs, son image l'est aussi. Or $\varphi(\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}) = S$.

c. Soit $\phi : S \to SU(2)$ telle que $\phi(a, b, c, d) = \begin{pmatrix} a + ib & -c + id \\ c + id & a - ib \end{pmatrix}$.

On vérifie aisément que ϕ est bijective et continue.

d. Donc l'image de S qui n'est autre que $SU(2)$ est connexe par arcs.

$SU(2)$ est isomorphe au groupe des quaternions unitaires. La loi $\star$ est la multiplication des quaternions. Les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sont les matrices de Pauli, utilisées en mécanique quantique pour représenter le spin des particules.

Problème :

Étant donné un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un réel a, on dit qu'une fonction réelle f définie au voisinage de a est *plate à l'ordre n en a* lorsque $f(x) - f(a)$ est négligeable devant $(x-a)^n$ mais pas devant $(x-a)^{n+1}$ lorsque x tend vers a.
On dit que f est *ultraplate en a* lorsque $f(x) - f(a)$ est négligeable devant $(x-a)^m$ lorsque x tend vers a, quel que soit l'entier naturel m.

Partie 1 : étude des espaces $E_n(a)$.

On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dont on rappelle qu'il possède aussi une structure d'anneau commutatif et d'algèbre.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel a, on note $E_n(a)$ l'ensemble des fonctions de E telles que la différence $f(x) - f(a)$ soit négligeable devant $(x-a)^n$ lorsque x tend vers a.

1. Soit $f \in E, a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
D'après la formule de Taylor-Young pour une fonction de classe C^n, que la fonction f appartient à $E_n(a)$ si et seulement si $f(x) - f(a) = \sum_{k=1}^n \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n) = 0 + o((x-a)^n)$ ce qui est vrai si et seulement si $\forall k \in [1, n]$, $\dfrac{f^{(k)}(a)}{k!} = 0$ par unicité des coefficients du DL de f en a.
Finalement, $f \in E_n(a)$ si et seulement si pour tout entier k compris entre 1 et n, la dérivée d'ordre k de f en a est nulle.

2. Un exemple de fonction ultraplate en 0.
Pour tout $x > 0$, on pose $b(x) = \exp(-(\ln x)^2)$.

a. La fonction b est bien définie sur $]0, +\infty[$ et de classe C^∞ par composition de fonctions de classe C^∞.
$b'(x) = -2\dfrac{\ln x}{x}\exp(-(\ln x)^2)$ et $b''(x) = -2\left(\dfrac{-2\ln^2 x}{x^2} - \dfrac{\ln x + 1}{x^2}\right)\exp(-(\ln x)^2)$
$= -2\left(\dfrac{-2\ln^2 x - \ln x + 1}{x^2}\right)\exp(-(\ln x)^2)$.
En posant $X = \ln x$, le polynôme $-2X^2 - X + 1 = (1+X)(1-2X)$ s'annule et change de signe en (-1) et en $1/2$, donc pour $\ln x = (-1)$ $\ln x = 1/2$ donc pour $x \in \{e^{-1}, \sqrt{e}\}$.
Plus précisément, b est croissante jusqu'à 1 puis décroissante et admet deux points d'inflexion en e^{-1} et $\sqrt{e}$.

b. La fonction b est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ par composition de fonctions de classe C^∞ et par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme $B_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$\forall x > 0, b^{(n)}(x) = \frac{B_n(\ln x)}{x^n}\exp(-(\ln x)^2).$$

Hérédité : $b^{(n+1)}(x) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\dfrac{B_n(\ln x)}{x^n}\exp(-(\ln x)^2))$
$= \exp(-(\ln x)^2)\left(\dfrac{-2\ln x}{x}\dfrac{B_n(\ln x)}{x^n} + \dfrac{B_n'(\ln x)/x}{x^n} - n\dfrac{B_n(x)}{x^{n+1}}\right)$
$= \exp(-(\ln x)^2)\left(\dfrac{-2\ln x B_n(\ln x) + B_n'(\ln x) - nB_n(\ln x)}{x^{n+1}}\right)$
On pose donc $B_{n+1}(X) = -2XB_n(X) + B_n'(X) - nB_n(X)$ dont le terme dominant est $(-2)^n X^n$ par récurrence et opération sur les degrés.

c. On rappelle les croissances comparées : $\lim_{X\to\pm\infty} X^n \exp(-X^2) = 0$. Si x tend vers 0^+, alors $X = \ln x$ tend vers $-\infty$. Donc $b^{(n)}(x) = \dfrac{B_n(\ln x)}{\exp(n\ln x)}\exp(-(\ln x)^2) = B_n(\ln x)\exp(-n\ln x - (\ln x)^2) = B_n(\ln x)\exp(-(\ln x)^2(1 + \frac{n}{\ln x}))$
Ainsi, $b^{(n)}(x) = B_n(\ln x)\exp(-(\ln x)^2)\exp(1 + \frac{n}{\ln x})$.

Le dernier terme tend vers e lorsque x tend vers 0^+. Le reste tend vers 0 par les croissances comparées rappelées précédemment.

L'ensemble tend donc vers 0 en 0^+. Donc b est ultraplate en 0^+. Par parité la fonction c est de classe C^∞ par théorème du prolongement de classe C^n puisque toutes ses dérivées tendent vers 0 en 0. Par ailleurs, c est ultraplate car $c^{(n)}(0) = 0$ pour tout n.

d. Par parité, la fonction c admet une dérivée nulle en (-1) et en 1. Comme $b''(1) \neq 0$, la fonction est plate d'ordre 1 en (-1) et en 1.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Soient f et g dans $E_n(a)$. Alors pour $k \in [1, n]$, $(\lambda f + g)^{(k)}(a) = \lambda f^{(k)}(a) + g^{(k)}(a) = 0 + 0$ donc $\lambda f + g$ est ultraplate en a

De plus, d'après le formule de Leibniz, $(fg)^k(a) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} f^{(j)}(a) g^{(k-j)}(a) = 0$ car soit $j \geq 1$, soit $k - j \geq 1$. Donc fg est ultraplate en a.

Finalement, $E_n(a)$ est bien une sous algèbre de E.

b. L'ensemble $E_n(0)$ n'est pas un idéal de l'anneau commutatif E. Si $f \in E_n(0)$ telle que $f(0) = 1$ (par exemple $f = b+1$) et g est une fonction telle que $g^{(n)}(0) = 1$ (par exemple $g = \exp$), alors $(fg)^{(n)}(0) = 1 \cdot 1 + 0 = 1 \neq 0$. Donc fg n'est pas ultraplate en 0.

L'ensemble $E_n(a)$ n'est donc pas absorbant.

c. f est ultraplate en 0 si et seulement si les dérivées de f sont toutes nulles en 0, si et seulement si les dérivées de $g : x \mapsto f(x - a)$ sont toutes nulles en a, si et seulement si g est ultraplate en a.

4. On a vu que $E_n(0)$ n'est pas un idéal. Par contre, si f est dans $E_n(0)$ et f n'annule en 0, alors pour tout $g \in E$, $fg \in E_n(0)$ en utilisant la formule de Leibniz.

Soit alors $b_a = \exp(-(\ln|x - a|)^2)$. Alors $b_a(a) = 0$ et b_a est ultraplate en a.

Alors $c = b_{-1} \cdot b_0 \cdot b_1$ est ultraplate à la fois en (-1), en 0 et en 1.

Partie 2 : interpolations polynomiales avec ajustement de dérivées

1. a. Nécessairement, X^{n+1} divise P_n. Donc $P_n = X^{n+1}A$ avec $A = aX + b$. Donc $P_n = aX^{n+2} + bX^{n+1}$.

De plus $P_n(1) = a + b = 1$ et $P_n'(1) = (n+2)a + (n+1)b = 0$.

Finalement, $P_n = X^{n+1}(n + 2 - (n+1)X)$ (unique par construction)

b. Soit $x \in [0, 1[$. Alors $P_n(x) = x^{n+1}(n + 2 - (n+1)x) \to_{n \to +\infty} 0$ car $(nx^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 par croissances comparées.

Pour $x = 1$, $P_n(1) = 1$ donc $\lim P_n(1) = 1$

c. La fonction ϕ est nulle sur $[0, 1[$ et $\phi(1) = 1$ n'est pas continue sur $[0, 1]$.

2. a. Φ est linéaire par linéarité de la dérivation et de la fonction d'évaluation en un point.

b. Soit $P \in \ker \Phi$. Alors pour $k \in [1, p]$, a_k est racine de P d'ordre $n_k + 1$ donc $(X - a_k)^{n_k+1}$ divise P.

Comme de plus tous les a_k sont distincts, les polynômes précédents sont deux à deux premiers entre eux, donc par le lemme de Gauss, P est divisible par leur produit.

Remarque : réciproquement, si P est multiple de leur produit, alors $P \in \ker \Phi$.

c. On note $A = \prod_{k=1}^{p} (X - a_k)^{n_k+1}$ qui est non nul.

Par théorème de division euclidienne, si B est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, alors $B = AQ + R$ avec $R \in \mathbb{R}_m[X]$. De plus cette écriture est unique.

Donc B est somme (unique) d'un élément AQ de $\ker \Phi$ et d'un élément de $\mathbb{R}_m[X]$.

Cela veut bien dire que $\ker \Phi$ et $\mathbb{R}_m[X]$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$.

d. Soit $N = \ker \Phi$. Alors $N \oplus \mathbb{R}_m[X] = \mathbb{R}[X]$. Soit $\Phi_r = \Phi_{|\mathbb{R}_m[X]}$ la restriction de Φ à $\mathbb{R}_m[X]$. Alors Φ_r est injective par construction. Or $dim \mathbb{R}_m[X] = m + 1 = dim(\mathbb{R}^{m+1})$. Donc par théorème du rang, Φ_r est aussi surjective, donc bijective.

C'est à dire que pour tout $(b_1, \dots b_p) \in \mathbb{R}^p$, il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à m appartenant à $\bigcap_{k=1}^{p} E_{n_k}(a_k)$ vérifiant :

$$\forall k \in [1, p], P(a_k) = b_k.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a. En posant $p = 3$, $a_1 = (-1)$, $a_2 = 0$ et $a_3 = 1$ et $b_1 = 1$, $b_2 = 0$ et $b_3 = 1$, l'application du résultat de la question précédente mène à l'existence d'une unique fonction polynomiale H_n de degré inférieur ou égal à $n+4$, appartenant à $E_n(0) \cap E_1(-1) \cap E_1(+1)$ et telle que $H_n(0) = 0$, $H_n(-1) = H_n(1) = 1$ (il y a en tout $n+5$ conditions).

b. $H_n(0) = 0$ et $H_n \in E_n(0)$, donc $H_n = X^{n+1}(aX^3+bX^2+cX+d)$. On nous suggère de chercher H_n sous la forme d'un polynôme pair.

Alors :

— Si n est pair : $b = d = 0$, $a+c = 1$ et $(n+4)a+(n+2)c = 0$ donc $c = \dfrac{n+4}{2}$ et $a = \dfrac{-(n+2)}{2}$

— Si n est impair, $a = c = 0$ et $b+d = 1$ et $(n+3)b+(n+1)c = 0$ donc $d = \dfrac{n+3}{2}$ et $b = \dfrac{-(n+1)}{2}$.

Partie 3 : approximations polynomiales

1. La fonction $\varphi : F \to \mathbb{R}$ telle que $\varphi(f) = f(0)$ est linéaire et $|\varphi(f)| = |f(0)| \leq 1 \cdot ||f||_\infty$. Donc φ est continue.

L'ensemble des fonctions f de F qui vérifient $f(0) = 0$ est l'image réciproque du fermé $\{0\}$ de $\mathbb{R}$ par l'application continue φ. Donc c'est une partie fermée de F ?

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $g_n : x \mapsto \sqrt{x^2+1/n} - \sqrt{1/n}$ et $g : x \mapsto |x|$.

a. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $(g_n - g)'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1/n} - 1} \leq 0$ car $x^2 + 1/n \geq x$.

Donc $g_n - g$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Par parité, $g_n - g$ est croissante sur $\mathbb{R}_-$. Donc $g_n - g$ atteint un minimum en 0 égal à 0. Enfin, $\lim_{x\to+\infty}(g_n - g)(x) = \lim_{x\to+\infty} |x|\sqrt{1+1/(nx^2)} - \sqrt{1/n} - |x| = \lim_{x\to+\infty} |x|(\sqrt{1+1/nx^2} - 1) - \sqrt{1/n}$.

Or $|x|\sqrt{1+1/nx^2} - 1 \sim \dfrac{|x|}{2}\dfrac{1}{nx^2} \to_{x\to+\infty} 0$.

Donc $||g_n - g||_\infty \leq \sqrt{1/n} \to_{n\to+\infty} 0$.

b. Le problème de la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est que sa limite (fonction valeur absolue) n'est pas dans F car elle n'est pas dérivable en 0.

Prenons alors h_n telle que $h_n(x) = g_n(x)$ si $x \geq 0$ et $h_n(x) = -g_n(x)$ si $x \leq 0$. Alors la suite h_n convient : en effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $h_n'(x) = 0$ donc par Taylor Young, $h_n(x) = h_n(0) + h_n'(0)x + o(x) = o(x)$.

Par contre, $|imh_n(x) = x$ pour $x \in [-1, 1]$ or la fonction identité, quoique de classe C^∞, donc dans F, n'est pas négligeable devant x lorsque x tend vers 0.

3. On note T l'application qui à une fonction f de F associe la fonction $T(f)$ définie sur $[-1, 1]$ par

$$\forall x \in [-1, 1], T(f)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

a. T est une application de F dans F par théorème fondamental de l'analyse (si f est de classe C^∞, alors ses primitives le sont aussi, donc en particulier celle qui s'annule en 0. En remarquant que T est linéaire et que $||T(f)||_\infty \leq 2||f||_\infty$, T est donc 2-lipischitzienne, donc continue.

b. Soit $f \in F$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note T^n la composée n-ième $T \circ T \circ \cdots \circ T$ (n fois T).

Par construction, $T^n(f)$ est une fonction de F nulle en 0 dont la dérivée n-ième est f et dont toutes les dérivées d'ordre inférieur à n s'annulent en 0.

Elle est déterminée de manière unique car à chaque étape d'intégration, la primitive s'annule en zéro donc la constante est nulle.

c. Si $T(f) = 0$, alors $f = (T(f))' = 0' = 0$. L'application T est donc injective.

Par contre, $T(f)$ s'annule en 0. Il n'existe donc aucune f telle que $T(f)$ soit la fonction constante égale à 1 qui est pourtant dans F. Donc T n'est pas surjective ?

4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction de F plate d'ordre k en 0.

a. $f^{(k+3)}$ est continue sur le segment $[-1, 1]$. Par le théorème de Stone-Weierstrass, une telle suite P_n de polynômes existe.

b. Par intégration, $T(P_n)$ est la primitive de P_n s'annulant en 0. De même, $f^{k+2} - f^{k+2}(0)$ est la primitive de f^{k+3} s'annulant en 0. Alors $\left|T(P_n)(x) - f^{k+2}(x) + f^{k+2}(0)\right| = \left|\int_0^x (P_n - f^{k+3})\right| \leq ||P_n - f^{k+3}||_\infty \cdot 1$ par croissance de l'intégrale.

En itérant, il existe effectivement un polynôme R tel que $deg(R) \leq k+2$ et $||T^{k+3}(P_n) - (f + R)||_\infty \leq ||P_n - f^{k+3}||_\infty \to_{n \to +\infty} 0$.