Théorème de Müntz

Mines MP 2009 Maths II

1. Il s'agit de montrer que la seule combinaison linéaire[1] des φ_λ qui est nulle... est la combinaison linéaire triviale.
❏ **Soient n un entier, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+$ des réels distincts deux à deux, et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha_1\varphi_{\lambda_1} + \cdots + \alpha_n\varphi_{\lambda_n} = 0$.** Une façon classique de montrer que chaque α_i est nul consiste à considérer le plus grand des λ_i, disons λ_{i_0}, diviser par x_i^λ et faire tendre x vers $+\infty$ dans la relation $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x^{\lambda_i - \lambda_{i_0}}$, ce qui élimine le terme α_{i_0}. Malheureusement, les objets considérés sont ici des fonctions sur $[\,0\,;\,1\,]$...
On feinte, en divisant (sur $]\,0\,;\,1\,]$) par $x^{\lambda_{i_0}}$ (le minimum des λ_i) et on fait tendre x vers 0. Plus précisément, on suppose la combinaison linéaire précédente non triviale, et on note i_0 l'indice correspondant au λ_i minimum (parmi les i tels que $\alpha_i \neq 0$). On obtient alors après division par $x^{\lambda_{i_0}}$ (pour $x > 0$) : $\alpha_{i_0} + \sum\limits_{i \neq i_0} \alpha_i x^{\lambda_i - \lambda_{i_0}} = 0$. En faisant tendre x vers 0^+, on obtient alors $\alpha_{i_0} = 0$, ce qui est absurde.
On peut également évaluer en $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2^n}$ et obtenir un déterminant de Vandermonde. Ou bient, on peut considérer l'application φ qui à une fonction f associe $x \mapsto x\,f'(x)$ et observer que les fonctions $x \mapsto x^\lambda$ sont valeurs propres pour des valeurs propres distinctes... Bref, il y a vraiment beaucoup de démonstrations possibles !

$$\boxed{\text{La famille } (\varphi_\lambda)_{\lambda \geqslant 0} \text{ est libre.}}$$

A. Déterminants de Cauchy

La condition « $a_k + b_k \neq 0$ pour tout $k \in [\![1\,;\,n]\!]$ » est insuffisante. On supposera donc plutôt que pour tout $i, j \in [\![1\,;\,n]\!]$, $a_i + b_j \neq 0$.

2. Commençons par noter que la phrase « si R(X) est de la forme... » n'est pas présente ici seulement pour fixer les notations : si les b_k sont distincts deux à deux, alors la décomposition en éléments simples de R (dont le dégré est -1 donc la partie entière nulle) est bien de la forme demandée. Mais si deux des b_i sont égaux, R ne se décompose pas sous la forme demandée. Il s'agissait donc bien d'une *hypothèse*.
Avec les notations de l'énoncé, on réalise[2] l'opération sur les colonnes C_k :

$$\mathrm{C}_n \leftarrow \sum_{k=1}^{n} \mathrm{A}_k\,\mathrm{C}_k.$$

Une telle opération multiplie le déterminant par A_n, et transforme la dernière colonne en

$$\begin{pmatrix} \sum \dfrac{\mathrm{A}_k}{a_1 + b_k} \\ \vdots \\ \sum \dfrac{\mathrm{A}_k}{a_n + b_k} \end{pmatrix}, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \begin{pmatrix} \mathrm{R}(a_1) \\ \vdots \\ \mathrm{R}(a_{n-1}) \\ \mathrm{R}(a_n) \end{pmatrix}, \qquad \text{soit encore} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mathrm{R}(a_n) \end{pmatrix}.$$

Il reste à développer selon la dernière colonne pour obtenir exactement le résultat demandé :

$$\boxed{\mathrm{A}_n \mathrm{D}_n = \mathrm{R}(a_n)\mathrm{D}_{n-1}.}$$

3. On commence par écarter le cas où deux des b_i sont égaux : dans ce cas en effet, deux colonnes de la matrice de Cauchy sont égales, donc le déterminant est nul, tout comme le membre de droite de la formule proposée.
On suppose donc à partir de maintenant que *les b_i sont distincts deux à deux*, ce qui permet d'utiliser la question précédente.
Une multiplication-évaluation standard fournit :

$$((\mathrm{X} + b_n)\,\mathrm{R})\,(-b_n) = \mathrm{A}_n = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{-b_n - a_i}{-b_n + b_i} = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{a_i + b_n}{b_n - b_i}.$$

[1] Et on parle bien de sommes finies, bien entendu...
[2] Comme indiqué maladroitement dans l'énoncé !

La question précédente fournit alors (attention au terme isolé !) :

$$\mathrm{D}_n = \frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{n-1} ((a_n - a_i)(b_n - b_i))}{\displaystyle(a_n + b_n) \prod_{i=1}^{n-1} (a_i + b_n) \prod_{i=1}^{n-1} (a_n + b_j)} \mathrm{D}_{n-1},$$

et la formule proposée dans l'énoncé s'en déduit alors par récurrence.

Pour les grognons, notons G_n le membre de droite de la formule proposée. Si on pense aux termes présents dans G_n et à ceux présents dans G_{n-1}, on constate qu'il y en a beaucoup en commun ! Ceux qui manquent sont au numérateur les $(a_n - a_i)(b_n - a_i)$ pour $i < n$, et au dénominateur les $a_n + b_j$ avec $j < n$, les $a_i + b_n$ avec $i < n$, et enfin $a_n + b_n$. On a donc :

$$\mathrm{G}_n = \frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{n-1} ((a_n - a_i)(b_n - b_i))}{\displaystyle(a_n + b_n) \prod_{i=1}^{n-1} (a_i + b_n) \prod_{i=1}^{n-1} (a_n + b_j)} \mathrm{G}_{n-1},$$

ce qui est la même relation de récurrence que celle vérifiée par les D_n. Puisque $\mathrm{D}_1 = \dfrac{1}{a_1 + b_1} = \mathrm{G}_1$, la récurrence opère sa magie :

$$\boxed{\mathrm{D}_n = \frac{\displaystyle\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\displaystyle\prod_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (a_i + b_j)}.}$$

B. Distance d'un point à une partie dans un espace normé

4. Rappelons que la borne inférieure d'un ensemble est la limite d'une suite d'éléments de cet ensemble. Ici, on dispose donc d'une suite d'éléments de A, disons $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tels que $\|x - a_n\| \xrightarrow[n \to \infty]{} d(x; \mathrm{A})$. Si cette distance est nulle, on a alors $a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x$, donc x est bien adhérent à A.

Réciproquement, si x est adhérent à A, alors il existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans A tels que $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x$, et on a donc $\|x_n - x\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$, de sorte que la borne inférieure des $\|x - y\|$, pour y décrivant A, est alors nulle.

$$\boxed{d(x; \mathrm{A}) = 0 \text{ si et seulement si } x \text{ est adhérent à A.}}$$

5. Notons tout d'abord que la relation $\mathrm{A}_n \subset \mathrm{A}_{n+1}$ nous assure que $d(x; \mathrm{A}_n) \geqslant d(x; \mathrm{A}_{n+1})$: la suite de terme général $d(x; \mathrm{A}_n)$ est décroissante et à valeurs positives, elle admet donc une limite $\ell \geqslant 0$.

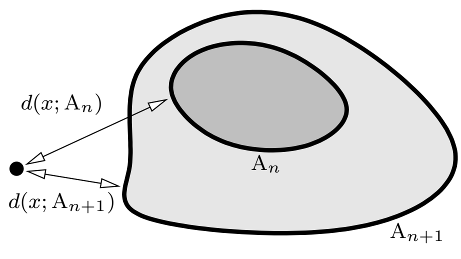

Fig. 1 — $d(x; \mathrm{A}_n) \geqslant d(x; \mathrm{A}_{n+1})$

Soit $n \in \mathbb{N}$; remarquons que, pour tout $a \in \mathrm{A}_n \subset \mathrm{A}$, on a $d(x; \mathrm{A}) \leqslant \|x - a\|$; en passant à la borne inférieure pour $a \in \mathrm{A}_n$, on obtient $d(x; \mathrm{A}) \leqslant d(x; \mathrm{A}_n)$. Puis, par passage à la limite, $d(x; \mathrm{A}) \leqslant \ell$.

Pour l'inégalité réciproque, fixons $\varepsilon > 0$. Il existe $a_0 \in \mathrm{A}$ tel que $\|x - a_0\| \leqslant d(x; \mathrm{A}) + \varepsilon$. Puisque A est la réunion des A_n, il existe n_0 tel que $a_0 \in \mathrm{A}_{n_0}$.

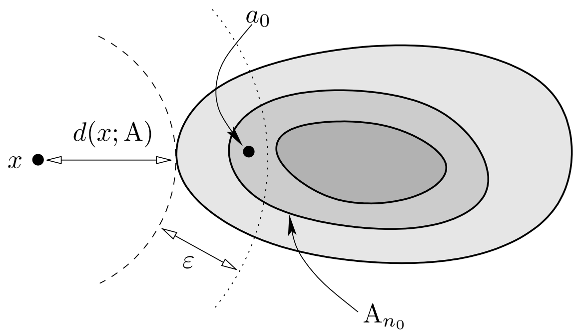

Fig. 2 — Le point a_0 et la partie A_{n_0}.

On a alors $d(x;\mathrm{A}_{n_0}) \leqslant \|x-a_0\| \leqslant d(x;\mathrm{A})+\varepsilon$, puis par décroissance de la suite de terme général $d(x;\mathrm{A}_n)$:

$$\ell \leqslant d(x;\mathrm{A}_{n_0}) \leqslant d(x;\mathrm{A})+\varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon>0$, donc $\ell \leqslant d(x;\mathrm{A})$.
Au total, on a bien le résultat souhaité :

$$\boxed{d(x;\mathrm{A}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} d(x;\mathrm{A}).}$$

6. Le sous-espace V est de dimension finie donc est fermé. Comme $0\in\mathrm{B}$, on en déduit que B est non vide (!) et c'est un fermé ; ainsi, l'intersection $\mathrm{B}\cap\mathrm{V}$ est fermée. Elle est de plus bornée (incluse dans B). Ainsi, $\mathrm{B}\cap\mathrm{V}$ est une partie fermée et bornée de l'espace de dimension finie V, donc :

$$\boxed{\mathrm{B}\cap\mathrm{V} \text{ est compacte.}}$$

Soit $x\in\mathrm{E}$. Puisque $\mathrm{B}\cap\mathrm{V}$ et une partie non vide (contient 0) de V, on a bien entendu $d(x;\mathrm{V})\leqslant d(x;\mathrm{B}\cap\mathrm{V})$. Mais plus précisément :

$$d(x;\mathrm{V}) = \inf_{y\in\mathrm{V}}\|x-y\| = \min\left(\inf_{y\in\mathrm{B}\cap\mathrm{V}}\|x-y\|\,,\ \inf_{y\in\mathrm{V}\setminus\mathrm{B}}\|x-y\|\right) = \min\left(d(x;\mathrm{B}\cap\mathrm{V}), d(x;\mathrm{V}\setminus\mathrm{B})\right).$$

— Si $y\in\mathrm{V}\setminus\mathrm{B}$ alors $\|x-y\|\geqslant\|x\|$, donc $d(x;\mathrm{V}\setminus\mathrm{B})\geqslant\|x\|$.
— Par ailleurs, $d(x;\mathrm{B}\cap\mathrm{V})\leqslant\|x-0\|=\|x\|$.
On a donc bien :

$$\boxed{d(x;\mathrm{V}) = d(x;\mathrm{B}\cap\mathrm{F}).}$$

7. Soit $x\in\mathrm{E}$. La fonction $y\mapsto\|x-y\|$ est continue (1-lipschitzienne) sur le compact $\mathrm{B}\cap\mathrm{V}$, donc (est bornée et...) possède un minimum : il existe $y_0\in\mathrm{B}\cap\mathrm{V}$ tel que $d(x;\mathrm{B}\cap\mathrm{V})=\|x-y_0\|$. D'après la question précédente, on a alors bien :

$$\boxed{d(x;\mathrm{V}) = \|x-y_0\|.}$$

C. Distance d'un point à un sous-espace de dimension finie dans un espace euclidien

8. Puisque V est de dimension finie, le cours nous assure que $\mathrm{E}=\mathrm{V}\oplus\mathrm{V}^\perp$, et on peut donc projeter orthogonalement sur V.
Ceux qui trouvent ces précautions superflues sont invités à considérer V *l'ensemble des applications polynomiales sur* $[0,1]$ *et penser au théorème de Weierstrass. Les imprudents qui auront tenté de faire un dessin sont alors invités à prendre une aspirine.*
Fixons $x\in\mathrm{E}$, et notons y le projeté orthogonal de x sur V. On a alors $z=x-y\in\mathrm{V}^\perp$.

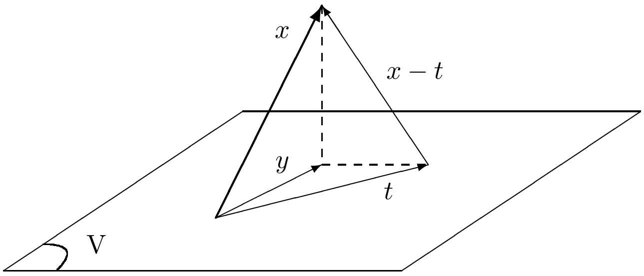

Fig. 3 — Un dessin, et tout s'éclaire.

Si $t \in \mathrm{V}$, on écrit alors, inspiré par le dessin précédent :

$$\|x-t\|^2 = \Big\| \underbrace{(x-y)}_{=z\in\mathrm{V}^\perp} + \underbrace{(y-t)}_{\in\mathrm{V}} \Big\|^2 = \|x-y\|^2 + \|y-t\|^2 \geqslant \|x-y\|^2 .$$

Ainsi, $\|x-y\|$ est le *minimum* des $\|x-t\|$ pour t décrivant V, donc $d(x;\mathrm{V}) = \|x-y\|$.
On note enfin que si y_1 est un autre élément de V réalisant ce minimum, Pythagore nous assure que $\|y-y_1\|^2 = 0$, donc $y = y_1$.

$$\boxed{p_{\mathrm{V}}^{\perp}(x) \text{ est l'unique élément } y \text{ de V tel que } d(x;\mathrm{V}) = \|x-y\|.}$$

9. Supposons la famille $(x_1, ..., x_n)$ liée. Quitte à réindexer, on peut supposer par exemple : $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \alpha_k x_k$. L'opération élémentaire sur les colonnes $\mathrm{C}_n \leftarrow \mathrm{C}_n - \sum\limits_{k=1}^{n-1} \alpha_k\, \mathrm{C}_k$ ne change pas le déterminant, et transforme la dernière colonne en

$$\mathrm{C}' = \begin{pmatrix} \langle x_1|v\rangle \\ \vdots \\ \langle x_n|v\rangle \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad v = x_n - \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k\, x_k = 0,$$

donc $\mathrm{C}' = 0$, donc $\mathrm{G}(x_1, ..., x_n) = 0$.
Réciproquement,
(et par la contraposée) : supposons la famille $\mathcal{E} = (x_1, ..., x_n)$ libre. Elle constitue alors une base du sous-espace V qu'elle engendre. Si on note $\mathcal{F}$ une base orthonormée de V, la matrice du produit scalaire (enfin, de sa restriction à V^2; notons le φ) dans $\mathcal{F}$ vaut d'une part $\mathrm{mat}(\varphi, \mathcal{F}) = \mathrm{I}_n$, et d'autre part (ben oui, c'est dans votre de cours de première comme de seconde année...) :

$$\mathrm{mat}(\varphi, \mathcal{F}) = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{P} \cdot \mathrm{mat}(\varphi, \mathcal{E}) \cdot \mathrm{P},$$

avec P la matrice de passage de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{F}$ (à laquelle on ne donnera pas de nom, pour éviter d'irréversibles guerres de religions). Il reste à noter que $\mathrm{mat}(\varphi, \mathcal{E})$ n'est autre que $\mathrm{M}(x_1, ..., x_n)$, puis prendre le déterminant de tout ce beau monde.

$$\boxed{\mathrm{G}(x_1, ..., x_n) = 0 \text{ si et seulement si } (x_1, ..., x_n) \text{ est liée.}}$$

10. Soit $x \in \mathrm{E}$. Notons y le projeté orthogonal de x sur V, puis $z = x - y$, de sorte que z est orthogonal à V donc à chaque x_i. On décompose y selon les x_i : $y = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$. L'opération élémentaire $\mathrm{C}_{n+1} \leftarrow \mathrm{C}_{n+1} - \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{C}_i$ dans le calcul du déterminant de $\mathrm{M}(x_1, ..., x_n, x)$ fournit alors :

$$\mathrm{G}(x_1, ..., x_n, x) = \begin{vmatrix} \langle x_1|x_1\rangle & \cdots & \langle x_1|x_n\rangle & \langle x_1|z\rangle \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \langle x_n|x_1\rangle & \cdots & \langle x_n|x_n\rangle & \langle x_n|z\rangle \\ \langle x|x_1\rangle & \cdots & \langle x|x_n\rangle & \langle x|z\rangle \end{vmatrix} = \langle x|z\rangle\ \mathrm{G}(x_1, ..., x_n)$$

(tous les termes de la dernière colonne sont nuls, sauf éventuellement le dernier). Il reste à noter que $\langle x|z\rangle = \langle y+z|z\rangle = \langle z|z\rangle = d(x;\mathrm{V})^2$. En divisant par $\mathrm{G}(x_1, ..., x_n)$ qui est bien non nul d'après la question précédente, on trouve bien comme demandé :

$$\boxed{d(x;\mathrm{V})^2 = \frac{\mathrm{G}(x_1, ..., x_n, x)}{\mathrm{G}(x_1, ..., x_n)}.}$$

D. Comparaison des normes N_∞ et N_2

11. Pour tout $x \in [0\,;1]$, $|f(x)| \leqslant N_\infty(f)$, donc $|f(x)|^2 \leqslant N_\infty(f)^2$, donc $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 |f(x)|^2\,dx \leqslant N_\infty(f)^2$, puis :

$$\boxed{N_2(f) \leqslant N_\infty(f).}$$

Si A est une partie de $\mathcal{C}([0\,;1])$ et $f \in \overline{A}^\infty$, alors il existe alors des $f_n \in A$ tels que $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{N_\infty} f$, c'est-à-dire $N_\infty(f-f_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. On a alors $N_2(f-f_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, donc $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{N_2} f$, donc $f \in \overline{A}^2$. Ainsi :

$$\boxed{\overline{A}^\infty \subset \overline{A}^2.}$$

12. Un demi chapeau pointu renversé devrait faire l'affaire. Définissons donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$, f_n la fonction continue, affine sur les segments $[0\,;1/n]$ et $[1/n\,;1]$, avec de plus $f(0)=0$, et $f(1/n)=f(1)=1$.

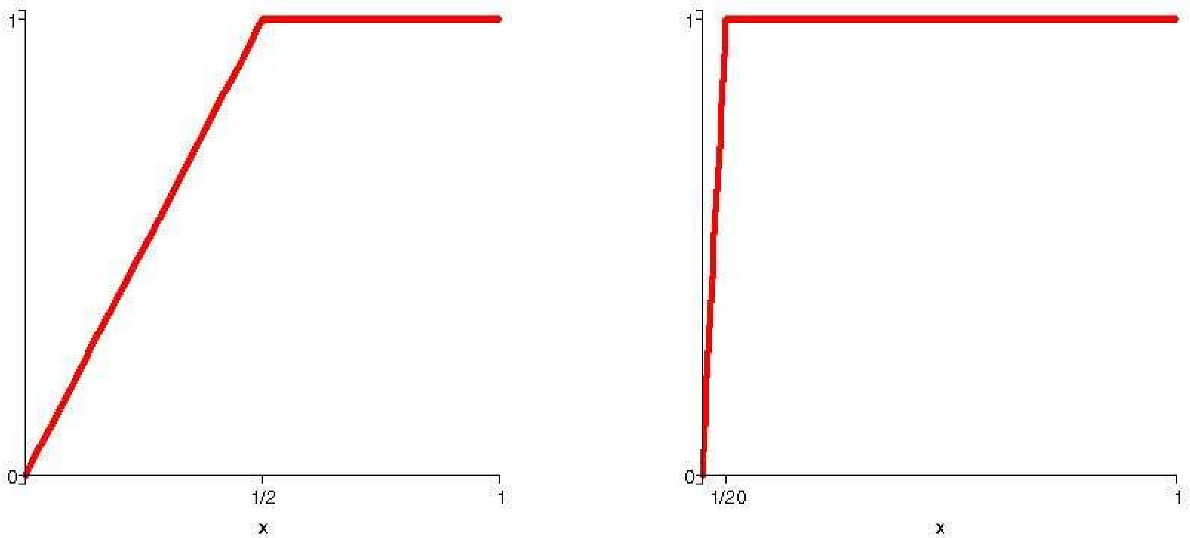

Fig. 4 — Les graphes de f_2 et f_{20}

On a bien entendu $f_n \in V_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et $N_2(f_n - \varphi_0) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Je laisse au courageux le difficile calcul exact de cette norme, me contentant d'une majoration basique, sachant que $|f_n(x)-\varphi_0(x)| \begin{cases} = 0 & si\ x \geqslant \dfrac{1}{n} \\ \leqslant 1 & \text{sinon} \end{cases}$.

On peut également prendre la suite intuitive $f_n(x) = 1-(1-x)^n$... qui simplifie bien les calculs !

On a bien prouvé :

$$\boxed{\varphi_0 \in \overline{V_0}^2.}$$

13. — L'application $\Phi : f \mapsto f(0)$ est continue pour N_∞ (elle est linéaire et vérifie $|\Phi(f)| \leqslant N_\infty(f)$) donc son noyau, en tant que image réciproque du fermé $\{0\}$, est un fermé, donc $\overline{V_0}^2 = V_0 \neq \mathcal{C}([0\,;1])$:

$$\boxed{V_0 \text{ n'est pas dense pour } N_\infty.}$$

— Soit $g \in \mathcal{C}([0\,;1])$: $g = g(0)\varphi_0 + \underbrace{(g-g(0)\varphi)}_{\in V_0}$. En reprenant les fonctions f_n de la question précédente, on peut approcher φ_0 par f_n (qui est petit pour N_2), ce qui nous conduit à considérer :

$$g_n = g(0)f_n + (g-g(0)\varphi).$$

On a $N_2(g-g_n) = |g(0)|\,N_2(\varphi_0 - f_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, et $g_n \in V_0$, donc g est adhérent à V_0 pour N_2. Ainsi,

$$\boxed{V_0 \text{ est dense pour } N_2.}$$

Remarque : On a le résultat classique (mais hors programme) suivant : « Si φ est une forme linéaire sur E, alors son noyau est dense si et seulement φ n'est pas continue. » Ici, en notant $\Phi : f \mapsto f(0)$:

— La majoration $\big|\Phi(f)\big| \leqslant N_\infty(f)$ assure que Φ est continue pour N_∞, donc son noyau V_0 n'est pas dense pour N_∞.

— *Si on remet les chapeaux pointus à l'endroit :* $\mathrm{N}_2(1-f_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$*, donc* $1-f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{N}_2} 0$ *mais* $\Phi(1-f_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \neq \Phi(0)$*, donc* Φ *n'est pas continue pour* N_2*, donc son noyau* V_0 *est dense pour* N_2*.*

Pour prouver le sens plus difficile de ce résultat, on utilise d'ailleurs une technique très proche de celle employée ici dans ce cas particulier.

14. Déjà, $\overline{\mathrm{V}}$ est une partie non vide de l'espace vectoriel normé ambiant (disons E) puisqu'elle contient V. Pour montrer qu'elle est stable par combinaison linéaire, on va utiliser la caractérisation séquentielle de ladite adhérence.

Fixons donc $x, y \in \overline{\mathrm{V}}$, et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et montrons que $z = \alpha x + \beta y$ est également dans $\overline{\mathrm{V}}$. Il existe deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de V qui convergent vers respectivement x et y. Si on note $z_n = \alpha x_n + \beta y_n$, alors d'une part $z_n \in \mathrm{V}$ (puisque ce dernier est stable par combinaisons linéaires), et d'autre part, grâce à un regroupement des plus malins :

$$\|z_n - z\| = \|\alpha(x_n - x) + \beta(y_n - y)\| \leqslant |\alpha|\,\|x_n - x\| + |\beta|\,\|y_n - y\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

donc $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z$, et z est bien adhérent à V.

$$\boxed{\text{Si V est un sous-espace vectoriel, alors } \overline{\mathrm{V}} \text{ également.}}$$

15. Si V est dense pour la norme N_∞, alors son adhérence $\overline{\mathrm{V}}^\infty$ vaut $\mathcal{C}([0\,;1])$, donc contient toutes les applications φ_m, pour $m \geqslant 0$.

Réciproquement, supposons que tous les φ_m sont adhérents à V pour N_∞. Le sous-espace $\overline{\mathrm{V}}^\infty$ contient alors toutes les combinaisons linéaires de φ_m, donc toutes les applications polynomiales. On fixe $f \in \mathcal{C}([0\,;1])$ puis $\varepsilon > 0$. Le théorème de Stone-Weierstraß assure qu'il existe une application polynomiale P telle que $\mathrm{N}_\infty(f - \mathrm{P}) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}\cdot$ D'après ce qui précède, P est dans $\overline{\mathrm{V}}^\infty$, donc il existe $g \in \mathrm{V}$ tel que $\mathrm{N}_\infty(\mathrm{P} - g) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$, et ainsi :

$$\mathrm{N}_\infty(f - g) = \mathrm{N}_\infty\left((f - \mathrm{P}) + (\mathrm{P} - g)\right) \leqslant \mathrm{N}_\infty(f - \mathrm{P}) + \mathrm{N}_\infty(\mathrm{P} - g) \leqslant \varepsilon.$$

Ainsi, toute élément de $\mathcal{C}([0\,;1])$ peut être approché arbitrairement près pour N_∞ par un élément de V : ce dernier est bien dense pour N_∞.

$$\boxed{\text{V est dense pour } \mathrm{N}_\infty \text{ si et seulement si pour tout } m \in \mathbb{N},\ \varphi_m \in \overline{\mathrm{V}}^\infty.}$$

16. On a comme plus haut une implication évidente. Pour le sens non trivial, on suppose donc que tous les φ_m sont adhérents à V pour N_2. Le sous-espace $\overline{\mathrm{V}}^2$ contient alors toutes les combinaisons linéaires de φ_m, donc toutes les applications polynomiales. On a donc $\overline{\mathrm{V}}^2$ qui est fermé (pour N_2) et contient le sous-espace V_P des applications polynomiales, donc contient $\overline{\mathrm{V}_\mathrm{P}}^2$, qui contient lui-même $\overline{\mathrm{V}_\mathrm{P}}^\infty$ (question 11) qui est égal à $\mathcal{C}([0\,;1])$ (théorème de Stone-Weierstraß). C'est gagné !

$$\boxed{\text{V est dense pour } \mathrm{N}_2 \text{ si et seulement si pour tout } m \in \mathbb{N},\ \varphi_m \in \overline{\mathrm{V}}^2.}$$

E. Un critère de densité de W pour la norme N_2

17. Après avoir noté que $\mathrm{W} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{W}_n$ (ce qui n'est peut-être pas si évident que ça; le lecteur est invité à le vérifier), on peut écrire :

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{W}}^2 = \mathcal{C}([0\,;1]) \quad & \underset{\text{Q 16}}{\iff} \quad \forall \mu \geqslant 0,\ \varphi_\mu \in \overline{\mathrm{W}}^2 \quad \underset{\text{Q 4}}{\iff} \quad \forall \mu \geqslant 0,\ d(\varphi_\mu, \mathrm{W}) = 0 \\ & \underset{\text{Q 5}}{\iff} \quad \forall \mu \geqslant 0,\ d(\varphi_\mu, \mathrm{W}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\overline{\mathrm{W}}^\infty = \mathcal{C}([0\,;1]) \text{ si et seulement si pour tout } \mu \in \mathbb{N},\ d(\varphi_\mu, \mathrm{W}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.}$$

18. Soit $\mu \geqslant 0$. D'après la question 10 :

$$d(\varphi_\mu, \mathrm{W}_n)^2 = \frac{\mathrm{G}(\varphi_{\lambda_0}, \ldots, \varphi_{\lambda_n}, \varphi_\mu)}{\mathrm{G}(\varphi_{\lambda_0}, \ldots, \varphi_{\lambda_n}, \varphi_\mu)}\cdot$$

Les produits scalaires sont simples à calculer :

$$\langle \varphi_\alpha | \varphi_\beta \rangle = \int_0^1 x^{\alpha+\beta}\,dx = \frac{1}{\alpha + \beta + 1} = \frac{1}{(\alpha + 1/2) + (\beta + 1/2)}\cdot$$

Cette dernière écriture nous montre que les deux déterminants en jeu sont de Cauchy. Qui plus est, ils concernent quasiment les même familles, donc les valeurs de ces déterminants sont certes compliquées, mais vont très largement collisionner.

Plus précisément, on trouve dans l'expression de $\mathrm{G}(\varphi_{\lambda_0},\dots,\varphi_{\lambda_n},\varphi_\mu)$ tous les termes présents dans $\mathrm{G}(\varphi_{\lambda_0},\dots,\varphi_{\lambda_n})$ ainsi que :

— au numérateur : les $\mu-\lambda_k$ (deux fois), pour $k\in[\![0\,;\,n]\!]$;

— au dénominateur : les $\mu+\lambda_i+1$ pour $i\in[\![0\,;\,n]\!]$ et les $\lambda_j+\mu$ pour $i\in[\![0\,;\,n]\!]$ (bref, deux fois les mêmes termes), ainsi que $2\mu+1$.

En simplifiant, on trouve donc :

$$d(\varphi_\mu,\mathrm{W}_n)^2=\frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(\mu-\lambda_k)^2}{\displaystyle(2\mu+1)\prod_{k=0}^{n}(\mu+\lambda_k+1)^2}.$$

$$\boxed{\text{Il n'est plus trop difficile de conclure.}}$$

19. Bien entendu, si $\lambda_k\xrightarrow[k\to+\infty]{}+\infty$, alors à partir d'un certain rang, $\lambda_k>\mu$, et on a alors

$$\frac{|\lambda_k-\mu|}{\lambda_k+\mu+1}=\frac{\lambda_k-\mu}{\lambda_k+\mu+1}=\frac{1-\frac{\mu}{\lambda_k}}{1+\frac{1+\mu}{\lambda_k}}\xrightarrow[k\to+\infty]{}1.$$

Réciproquement, supposons $\dfrac{|\lambda_k-\mu|}{\lambda_k+\mu+1}\xrightarrow[k\to+\infty]{}1$. L'application $f:x\mapsto\dfrac{\mu-x}{x+\mu+1}=-1+\dfrac{2\mu+1}{x+\mu+1}$ est décroissante sur $[0,\mu]$, donc prend sur cet intervalle des valeurs comprises entre $f(\mu)=0$ et $f(0)=\dfrac{\mu}{\mu+1}$; en particulier, $|f(x)|\leqslant\dfrac{\mu}{\mu+1}<1$. Puisque $|f(\lambda_k)|\xrightarrow[k\to+\infty]{}1$, cela impose aux λ_k d'être dans $]\mu,+\infty[$ à partir d'un certain rang. On a alors, en notant $r_k=\dfrac{\lambda_k-\mu}{\lambda_k+\mu+1}$: d'une part $r_k\xrightarrow[k\to+\infty]{}1^-$ ($r_k=1-\dfrac{2\mu+1}{\lambda_k+\mu+1}$ est majoré par 1), et d'autre part, $\lambda_k=\dfrac{r_k(\mu+1)+\mu}{1-r_k}$, donc $\lambda_k\xrightarrow[k\to+\infty]{}+\infty$.

$$\boxed{\text{Pour tout }\mu\geqslant0,\ \frac{|\lambda_k-\mu|}{\lambda_k+\mu+1}\xrightarrow[k\to+\infty]{}1\text{ si et seulement si }\lambda_k\xrightarrow[k\to+\infty]{}+\infty.}$$

20. Fixons $\mu\in\mathbb{R}^+$. Il y a équivalence entre « $p_n=\displaystyle\prod_{k=0}^{n}\frac{|\lambda_k-\mu|}{\lambda_k+\mu+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ » et « $\ln(p_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}-\infty$ ». Si de plus $\lambda_n\xrightarrow[n\to\infty]{}+\infty$, alors pour n assez grand,

$$\ln\frac{|\lambda_n-\mu|}{\lambda_n+\mu+1}=\ln\left(1-\frac{2\mu+1}{\lambda_n+\mu+1}\right)\sim-\frac{2\mu+1}{\lambda_n},$$

donc il y a équivalence entre la divergence des séries (à termes de signes constants) $-\sum\dfrac{1}{\lambda_n}$ et $\sum\ln\dfrac{|\lambda_n-\mu|}{\lambda_n+\mu+1}$.

Enfin, si λ_k ne tend pas vers $+\infty$, alors la série $\displaystyle\sum_k\frac{1}{\lambda_k}$ sera grossièrement divergente (pour ceux qui doutent, prenez la contraposée de cette affirmation).

Faisons le bilan :

— Supposons $\overline{\mathrm{W}}^2=\mathcal{C}([0\,;\,1])$: si λ_k ne tend pas vers $+\infty$, alors $\displaystyle\sum_k\frac{1}{\lambda_k}$ est divergente. On suppose donc dans la suite : $\lambda_k\xrightarrow[k\to+\infty]{}0$. D'après la question 17, on a : $d(\varphi_1,\mathrm{W}_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, donc (question 18) : $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}\frac{|\lambda_k-1|}{\lambda_k+2}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, donc la série de terme général $\ln\dfrac{|\lambda_k-1|}{\lambda_k+2}$ est divergente, donc $\sum\dfrac{1}{\lambda_k}$ également.

— Supposons que la série $\displaystyle\sum_k\frac{1}{\lambda_k}$ diverge, et fixons $\mu\geqslant0$.

  — Si λ_k ne tend pas vers $+\infty$, alors $\ln\dfrac{|\lambda_k-\mu|}{\lambda_k+\mu+1}$ est d'après la question précédente grossièrement divergente (« vers $-\infty$ »), donc $d(\varphi_\mu,\mathrm{W}_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

— Sinon, $\ln \dfrac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1} \sim -\dfrac{2\mu+1}{\lambda_k}$, donc la série de terme général $\ln \dfrac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1}$ diverge (vers $-\infty$), donc $d(\varphi_\mu, \mathrm{W}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

On vient de montrer que pour tout $\mu \geqslant 0$, $d(\varphi_\mu, \mathrm{W}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, donc (question 17) : W est dense dans $\mathcal{C}([\,0\,;\,1\,])$.

$$\boxed{\overline{\mathrm{W}}^2 = \mathcal{C}([\,0\,;\,1\,]) \text{ si et seulement si } \sum_k \frac{1}{\lambda_k} \text{ est divergente.}}$$

F. Un critère de densité de W pour la norme N_∞

21. Si W est dense dans $\mathrm{E} = \mathcal{C}([\,0\,;\,1\,])$ pour N_∞, alors $\overline{\mathrm{W}}^\infty = \mathrm{E}$. Mais la question 11 nous dit que $\overline{\mathrm{W}}^\infty \subset \overline{\mathrm{W}}^2$, donc $\overline{\mathrm{W}}^2 = \mathrm{E}$, donc W est dense dans E pour N_2, et la question 20 nous assure que $\displaystyle\sum_k \frac{1}{\lambda_k}$ est divergente.

$$\boxed{\text{Si } \overline{\mathrm{W}}^\infty = \mathcal{C}([\,0\,;\,1\,]), \text{ alors } \sum_k \frac{1}{\lambda_k} \text{ est divergente.}}$$

22. Notons $\delta = \varphi_\mu - \psi$ (de sorte que $\delta(0) = 0$, car les λ_k sont strictement positifs). On a, pour tout $x \in [\,0\,;\,1\,]$, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\delta(x)| = \left|\int_0^x \delta'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left(\int_0^x 1^2\right)^{1/2} \left(\int_0^x |\delta'|^2\right)^{1/2} \leqslant \sqrt{x}\left(\int_0^1 |\delta'|^2\right)^{1/2} \leqslant \mathrm{N}_2(\delta').$$

Et comme ceci est vrai pour tout $x \in [\,0\,;\,1\,]$, on en déduit :

$$\boxed{\mathrm{N}_\infty(\varphi_\mu - \varphi) \leqslant \mathrm{N}_2(\delta') = \mathrm{N}_2\left(\mu\varphi_{\mu-1} - \sum_{k=0}^n a_k\lambda_k\varphi_{\lambda_k-1}\right).}$$

23. Sous les hypothèses de l'énoncé, on va montrer la densité de W pour N_∞ en utilisant la question 15. On fixe donc un entier $m \geqslant 1$ ($\lambda_0 = 0$, ce qui règle le cas $m = 0$) et $\varepsilon > 0$, puis on cherche $g \in \mathrm{W}$ tel que $\mathrm{N}_\infty(\varphi_m - g) \leqslant \varepsilon$.
La question précédente nous invite fortement à approcher (pour N_2) $m\varphi_{m-1}$ par une combinaison linéaire de φ_{λ_k-1}.
Tout d'abord, $\lambda_k - 1 > 0$ pour k assez grand (un seul des λ_k peut valoir 1). Si λ_k ne tend pas vers $+\infty$, alors $\lambda_k - 1$ non plus, donc $\displaystyle\sum \frac{1}{\lambda_k - 1}$ diverge grossièrement. Et si $\lambda_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$, alors $\dfrac{1}{\lambda_k - 1} \sim \dfrac{1}{\lambda_k}$, et comme ces choses sont de signe constant, la divergence de $\displaystyle\sum \frac{1}{\lambda_k}$ nous assure celle de $\displaystyle\sum \frac{1}{\lambda_k - 1}$.
Ainsi, d'après la question 20, les φ_{λ_k-1} engendrent un espace W_1 dense dans $\mathcal{C}([\,0\,;\,1\,])$ pour N_2, donc il existe $g \in \mathrm{W}_1$ tel que $\mathrm{N}_2(m\varphi_{m-1} - g) \leqslant \varepsilon$. En supposant que $g = \displaystyle\sum_{k=0}^m b_k\varphi_{\lambda_k-1}$, on pose alors $\psi = \displaystyle\sum_{k=0}^n \frac{b_k}{\lambda_k}\varphi_{\lambda_k}$, et la question précédente nous assure alors :

$$\mathrm{N}_\infty(\varphi_m - \psi) \leqslant \mathrm{N}_2(m\varphi_{m-1} - g) \leqslant \varepsilon.$$

Ainsi, $\varphi_m \in \overline{\mathrm{V}}^\infty$, et la question 15 permet de conclure :

$$\boxed{\text{Si } \sum_k \frac{1}{\lambda_k} \text{ est divergente, alors } \overline{\mathrm{W}}^\infty = \mathcal{C}([\,0\,;\,1\,]).}$$

24. Supposons enfin que $\lambda_0 = 0$, que $m := \inf_{k\geqslant 1} \lambda_k > 0$, et que $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{\lambda_k}$ diverge. En notant $\lambda'_k = \dfrac{\lambda_k}{m}$, on est ramené au cas précédent : les $\varphi_{\lambda'_k}$ engendrent un sous-espace W' dense de $\mathcal{C}([\,0\,;\,1\,])$. Fixons alors $\mu > 0$ et montrons que φ_μ est dans l'adhérence de W.
Soit $\varepsilon > 0$. D'après ce qui précède, $\varphi_{\mu/m}$ est dans l'adhérence de W', donc il existe f de la forme $\displaystyle\sum_{k=0}^n \alpha_k\,\varphi_{\lambda'_k}$ telle que $\mathrm{N}_\infty\left(\varphi_{\mu/m} - f\right) \leqslant \varepsilon$. Si on note $g : x \mapsto f(x^m)$, alors pour tout $x \in [\,0\,;\,1\,]$, on aura $|g(x) - x^\mu| = \left|f(x^m) - \varphi_{\mu/m}(x^m)\right| \leqslant \mathrm{N}_\infty(\varphi_{\mu/m} - f)$ (car $x^m \in [\,0\,;\,1\,]$). Enfin, on note que $g(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^n \alpha_k\,\varphi_{\lambda_k/m}(x^m) = \sum_{k=0}^n \alpha_k\,\varphi_{\lambda_k}(x)$, donc $g \in \mathrm{W}$. On a donc approché φ_μ à moins de ε (pour N_∞) par un élément de W.
Ainsi, tous les φ_μ sont dans $\overline{\mathrm{W}}^\infty$, donc (question 15) : W est dense dans $\mathcal{C}([\,0\,;\,1\,])$ pour N_∞.

$$\boxed{\text{Ce qui termine ce corrigé.}}$$