DS4

Calculatrices interdites

L'objectif du problème est de définir et d'étudier les notions de ***polynôme, de matrice et de système différentiel stable***.
La partie I traite le cas particulier de la dimension 2 et aborde un contre-exemple en dimension 3. La partie II introduit les outils théoriques qui se spécialisent dans la partie III pour montrer en partie IV le critère de Routh-Hurwitz pour la stabilité des polynômes unitaires de degré 3.
La partie V est une application de la partie IV à un système différentiel d'ordre 3 particulier.
La partie I est indépendante des quatre autres parties. Les parties II, II, IV et V sont, pour une grande part, indépendantes les unes des autres.
Le résultat principal de la partie II et celui de la partie IV sont résumés clairement en fin de partie.
Il est demandé, lorsqu'un raisonnement utilise un résultat obtenu précédemment dans le problème, d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Notations et définitions

Notations :

Soient n et p deux entiers naturels non nuls, $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Notons $\mathbb{K}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.
I_n la matrice identité d'ordre n.
Pour $P \in \mathbb{K}[X]$, on note $Z_{\mathbb{K}}(P)$ l'ensemble des racines de P qui sont dans $\mathbb{K}$, c'est-à-dire l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{K}$ qui sont tels que : $P(\lambda) = 0$.
On dit que P est unitaire si P est non nul et si son coefficient dominant est égal à 1.
Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\mathrm{Tr}(A)$ la trace de A, ${}^tA$ la matrice transposée de A, $\det(A)$ le déterminant de A et χ_A le polynôme caractéristique de A.
L'ensemble $Z_{\mathbb{K}}(\chi_A)$ est donc l'ensemble des valeurs propres de A appartenant à $\mathbb{K}$ et il est noté $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$.
Notons $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $O \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que ${}^tO\,O = I_n$.
Pour $x = (x_1, \ldots, x_n)$ dans $\mathbb{K}^n$, on définit $A\,x$ comme étant l'élément $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que : $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on note $Re(z)$ la partie réelle de z, $|z|$ le module de z et $\overline{z}$ le complexe conjugué de z.

Définitions

Pour $P \in \mathbb{K}[X]$, on dit que le polynôme P est **stable** si pour tout $\lambda \in Z_{\mathbb{C}}(P)$, $Re(\lambda) < 0$.
Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on dit que la matrice A est **stable** si χ_A est stable.

I — [STABILITÉ DANS DES CAS PARTICULIERS]

Soient a et b deux réels. On note $P(X) = X^2 + aX + b$ et $\Delta = a^2 - 4b$.
On note z_1 et z_2 deux nombres complexes tels que : $P(X) = (X - z_1)(X - z_2)$.

Soit $Q(X) = X^3 + X^2 + X + 1$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $a = -(z_1 + z_2)$ et $b = z_1 z_2$.

2. On suppose dans cette question que $\Delta > 0$.

- **a.** Vérifier que si P est stable, alors $a > 0$ et $b > 0$.
- **b.** Montrer réciproquement que si $a > 0$ et $b > 0$, alors P est stable.

3. On suppose dans cette question que $\Delta = 0$.
Montrer que P est stable si et seulement si $a > 0$ et $b > 0$.

4. On suppose dans cette question que $\Delta < 0$.

- **a.** Justifier que $z_2 = \overline{z_1}$.
- **b.** Montrer que P est stable si et seulement si $a > 0$ et $b > 0$.

5. On suppose dans cette question que $n = 2$ et que $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- **a.** Exprimer χ_A en fonction de $\mathrm{Tr}(A)$ et $\det(A)$.
- **b.** Établir que A est stable si et seulement si $\mathrm{Tr}(A) < 0$ et $(-1)^n \det(A) > 0$.

6. On suppose dans cette question que $n = 3$.

- **a.** Trouver les racines complexes de Q.
- **b.** Vérifier que $\mathrm{Tr}(B) < 0$ et que $(-1)^n \det(B) > 0$.
- **c.** Montrer que ni Q ni B ne sont stables.

II — [NORME SUBORDONNÉE ET MESURE DE LOZINSKIĬ]

Soit n un entier naturel non nul. Dans toute cette partie, on note $\|\cdot\|$ une certaine norme sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^n$. On définit l'ensemble : $\mathcal{B} = \left\{x \in \mathbb{K}^n \text{ tel que } \|x\| = 1\right\}$.
Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit : $|||A||| = \sup_{x\in\mathcal{B}}(\|Ax\|)$ (l'existence de cette borne supérieure sera établie dans la question II.1.c).

1.

- **a.** Justifier que $\mathcal{B}$ est un compact.
- **b.** Soit K un compact et $f : K \to \mathbb{R}$ continue. <u>Démontrer</u> que $f(K)$ est un compact.
- **c.** En déduire rigoureusement l'existence de $x_0 \in \mathcal{B}$ tel que : $\forall x \in \mathcal{B}, \|Ax\| \leqslant \|Ax_0\|$.
  Cela justifie donc la définition de $|||A||| = \sup_{x\in\mathcal{B}}(\|Ax\|)$ et on a alors $|||A||| = \|Ax_0\|$.
- **d.** Montrer que $|||I_n||| = 1$.
- **e.** Montrer rigoureusement que l'application $A \mapsto |||A|||$ définit ainsi une norme $|||\cdot|||$ sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
  (on manipulera les bornes supérieures avec précaution.)
  On l'appelle la norme subordonnée à $\|\cdot\|$: en effet, elle dépend du choix de la norme $\|\cdot\|$.
- **f.** Justifier que l'application $x \mapsto \|Ax\|$ est continue sur $\mathbb{K}^n$.
- **g.** Établir que pour tout $x \in \mathbb{K}^n$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a : $\|Ax\| \leqslant |||A|||. \|x\|$.

h. Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$|||A||| - |||B||| \leqslant |||A - B||| \qquad \text{et} \qquad |||AB||| \leqslant |||A||| \cdot |||B|||.$$

2. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a : $Re(\lambda) = \lim_{u \to 0^+} \left(\dfrac{|1 + u\lambda| - 1}{u} \right)$.

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On se propose dans cette question de montrer l'existence du réel :

$$\mu(A) = \lim_{u \to 0^+} \left(\frac{|||I_n + uA||| - 1}{u} \right)$$

Ce réel est appelé mesure de Lozinskiĭ de A (il dépend du choix de la norme initiale).
Pour $u > 0$, on note $\mu(A, u) = \dfrac{|||I_n + uA||| - 1}{u}$.

a. Montrer que pour tout u et v éléments de $\mathbb{R}_+^*$:

$$\mu(A, u) - \mu(A, v) = |||u^{-1} I_n + A||| - |||v^{-1} I_n + A||| - (u^{-1} - v^{-1}).$$

b. En utilisant les questions **II.1.d.** et **II.1.h.**, en déduire que si $0 < u \leqslant v$, alors

$$\mu(A, u) - \mu(A, v) \leqslant 0.$$

c. Vérifier que pour tout $u > 0$, on a : $-|||A||| \leqslant \mu(A, u) \leqslant |||A|||$.

d. En déduire rigoureusement que la fonction $u \mapsto \mu(A, u)$ admet une limite en 0^+.
On note $\mu(A) = \lim_{u \to 0^+}(\mu(A, u))$.

4. On suppose dans cette question que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$.

a. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{C}^n$ tel que $Ax = \lambda x$, $\|x\| = 1$ et puis que, pour tout réel u strictement positif, on a : $\|((I_n + uA)x)\| = |1 + u\lambda|$.

b. En déduire que $Re(\lambda) \leqslant \mu(A)$.

c. En déduire une condition suffisante sur $\mu(A)$ pour que A soit stable.

Le résultat principal de cette partie II est que :

$$\text{pour tout } \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A), \quad Re(\lambda) \leqslant \mu(A)$$

où

$$\mu(A) = \lim_{u \to 0^+} \left(\frac{|||I_n + uA||| - 1}{u} \right).$$

III — [NORMES ET MESURES DE LOZINSKIĬ ASSOCIÉES]

À tout élément $x = (x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{C}^n$, on associe la matrice-colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. De plus, si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on note $\overline{X} = \begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \vdots \\ \overline{x_n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et ${}^tX = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{C})$.

On munit $\mathbb{C}^n$ du produit scalaire canonique et de sa norme associée définis par les formules :

$\forall (x,y) \in \mathbb{C}^n, \quad (x \mid y) = {}^t\overline{X}Y = \sum\limits_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i \qquad$ et $\qquad \|x\|_2 = \sqrt{(x \mid x)} = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2}.$

On remarque que ce produit scalaire et cette norme sur $\mathbb{C}^n$ donnent par restriction le produit scalaire canonique et sa norme associée sur $\mathbb{R}^n$ définis par :

$\forall (x,y) \in \mathbb{C}^n, \quad (x \mid y) = {}^tXY = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad$ et $\qquad \|x\|_2 = \sqrt{(x \mid x)} = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}.$

Pour A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on admet que les réels $|||A|||$ et $\mu(A)$ sont les mêmes selon que l'on considère A comme élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que l'on munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|\cdot\|_2$, ou que l'on considère A comme élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et que l'on munit $\mathbb{C}^n$ de la norme $\|\cdot\|_2$. On note alors ces deux réels $|||A|||_2$ et $\mu_2(A)$. On a ainsi :

$$|||A|||_2 = \sup\nolimits_{x \in \mathcal{B}_2} (\|Ax\|_2) \quad \text{où} \quad \mathcal{B}_2 = \left\{ x \in \mathbb{K}^n \text{ tel que } \|x\|_2 = 1 \right\}.$$

$$\text{et } \mu_2(A) = \lim\nolimits_{u \to 0^+} \left(\frac{|||I_n + uA|||_2 - 1}{u} \right).$$

Dans toute cette partie, on désigne par A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $u > 0$:

$$\|(I_n + uA)x\|_2^2 = {}^tXX + u\, {}^tX({}^tA + A)X + u^2\, {}^tX\, {}^tAAX.$$

2. (Pour les 5/2 uniquement)

Montrer qu'il existe $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tels que $\alpha_1 \geqslant \dots \geqslant \alpha_n$ et

$${}^tA + A = O \begin{pmatrix} \alpha_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \alpha_n \end{pmatrix} {}^tO.$$

Les 3/2 admettront ce résultat.

3. On suppose dans toute cette question que $x \in \mathbb{R}^n$ et $\|x\|_2 = 1$. On pose $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = {}^tOX$.

a. Montrer que $\|y\|_2^2 = {}^tYY = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2 = 1$.

b. Vérifier que $\|(I_n + uA)x\|_2^2 = 1 + u \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i y_i^2 + u^2\, {}^tX\, {}^tAAX$.

c. Montrer l'existence de deux réels γ et δ tels que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifiant ${}^tXX = 1$, on ait : $\gamma \leqslant {}^tX\, {}^tAAX \leqslant \delta$.

d. Montrer que pour tout γ et δ choisis comme en III.3.c, on a, pour tout $u > 0$:

$$\sqrt{1 + \alpha_1 u + \gamma u^2} \leqslant |||I_n + uA|||_2 \leqslant \sqrt{1 + \alpha_1 u + \delta u^2}.$$

e. On note $S = \dfrac{{}^tA + A}{2}$.

En déduire que $\mu_2(A) = \dfrac{\alpha_1}{2} = \max \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(S) \right\}$.

4. Soit H une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible. Pour $x \in \mathbb{C}^n$, on pose $\|x\|_H = \|Hx\|_2$.

On admet que l'on définit ainsi des normes sur $\mathbb{C}^n$ comme sur $\mathbb{R}^n$ qui donnent sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une même norme subordonnée $|||\cdot|||_H$ et une même mesure de Lozinskiĭ notée μ_H.

a. Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $|||A|||_H = |||HAH^{-1}|||_2$.

b. En déduire que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a : $\mu_H(A) = \mu_2(HAH^{-1})$.

IV — [UN CRITÈRE DE STABILITÉ EN DEGRÉ 3]

Soient a, b et c trois réels. On considère le polynôme réel P unitaire de degré 3 écrit sous la forme :

$$P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c.$$

On dit que P vérifie la propriété $\mathcal{H}$ si

$$a > 0 \quad b > 0, \quad c > 0 \quad \text{et} \quad ab - c > 0.$$

Par le théorème de D'Alembert-Gauss, on note z_1, z_2 et z_3 trois nombres complexes tels que :

$$P(X) = (X - z_1)(X - z_2)(X - z_3)$$

1. Montrer que : $a = -(z_1 + z_2 + z_3)$, $\qquad b = z_1z_2 + z_2 + z_3 + z_3z_1$, $\qquad c = -z_1z_2z_3$ et

$$ab - c = -z_1^2z_2 - z_1^2z_3 - z_2^2z_1 - z_2^2z_3 - z_3^2z_1 - z_3^2z_2 - 2z_1z_2z_3.$$

2. Montrer que l'une des racines de P est un nombre réel.

On suppose dans toute la suite de cette partie que z_1 est un réel qui sera noté α_1 et que z_2 et z_3 s'écrivent sous la forme $z_2 = \alpha_2 + i\beta_2$ et $z_3 = \alpha_3 + i\beta_3$ avec des réels α_2, α_3, β_2 et β_3.

3. On suppose dans cette question que $\beta_2 = 0$.

a. Montrer que $\beta_3 = 0$.

b. Montrer que si P est stable, alors P vérifie la propriété $\mathcal{H}$.

4. On suppose dans cette question que $\beta_2 \neq 0$.

a. Montrer que $\alpha_3 = \alpha_2$ et que $\beta_3 = -\beta_2$.

b. Vérifier que : $a = -(\alpha_1 + 2\alpha_2)$, $\quad b = 2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2 + \beta_2^2$, $\quad c = -\alpha_1\left(\alpha_2^2 + \beta_2^2\right)$ $\quad$ et

$$ab - c = -2\alpha_2\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_2^2\right) - 4\alpha_1\alpha_2^2.$$

c. Montrer que si P est stable, alors P vérifie la propriété $\mathcal{H}$.

5. Montrer que si P vérifie la propriété $\mathcal{H}$, alors $Re(z_1), Re(z_2)$ et $Re(z_3)$ sont non nuls.

6. On suppose dans cette question que P vérifie la propriété $\mathcal{H}$.

On pose alors $A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -c' & 0 & 1 \\ 0 & -b' & -a' \end{pmatrix}$ avec $a' = a$, $b' = \dfrac{ab-c}{a}$ et $c' = \dfrac{c}{a}$ si bien que a', b' et c' sont trois réels strictement positifs.

On note H la matrice diagonale inversible suivante : $H = \begin{pmatrix} \sqrt{a'b'c'} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{a'b'} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{a'} \end{pmatrix}$.

On pose $B' = HA'H^{-1}$.

a. Exprimer $\chi_{A'}$ en fonction de P.

b. Calculer explicitement B' et vérifier que : $\dfrac{{}^tB' + B'}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \end{pmatrix}$.

c. En déduire que $\mu_H(A') = 0$.

d. En conclure que P est stable.

Le résultat principal de cette partie IV est que :
un polynôme à coefficients réels, unitaire de degré 3 est stable si et seulement si ce polynôme vérifie la propriété $\mathcal{H}$.

V — [EXEMPLE DE SYSTÈME DIFFÉRENTIEL STABLE]

Soit $C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

On considère le système différentiel (S) suivant, d'inconnue $t \mapsto X(t)$, une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad X'(t) = CX(t).$$

On dit que ce système différentiel (S) est **asymptotiquement stable** si, quelle que soit la solution X de (S), on a :

$$\lim_{t \to +\infty} (X(t)) = 0.$$

1. Justifier que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}, \chi_C(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 4$.
2. En déduire que C est stable.
3. Montrer l'existence d'une matrice $U \in \mathcal{C}_3(\mathbb{C})$ inversible et de trois réels $\alpha_1 < 0, \alpha_2 < 0$ et $\beta_2 \neq 0$ tels que :

   $C = UDU^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 + i\beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 - i\beta_2 \end{pmatrix}$.

   On ne cherchera pas à trouver explicitement U ni les réels α_1, α_2 et β_2
4. On note, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $Y(t) = U^{-1}X(t)$.

   a. Montrer que X est solution de (S) si et seulement si Y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a : $Y'(t) = DY(t)$.

   b. Montrer qu'il existe X_1, X_2 et X_3 dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

   $$X(t) = \exp(\alpha_1 t)X_1 + \exp(\alpha_2 t)\cos(\beta_2 t)X_2 + \exp(\alpha_2 t)\sin(\beta_2 t)X_3.$$

   On ne cherchera pas à trouver explicitement les matrices X_1, X_2 et X_3.

   c. Justifier que le système différentiel (S) est stable.
5. Plus généralement, si $X' = AX$ est un système différentiel avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que ce système différentiel est asymptotiquement stable si et seulement si A est une matrice stable.