Exercice

1. $u_n = o(n!)$ signifie $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{n!} = 0$ Les suite $e^n = o(n!)$ d'après les croissances comparées. Par contre $n! < n^n$ donc n^n n'est pas négligeable devant $n!$.

2. a est un réel strictement positif donné . On considère la fonction $f_a : x \to f_a(x) = \frac{1}{a+x}$
   (a) f_a est la composée de $x \to a + x$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui sont C^∞ , et $a + x > 0$ lorsque $x \in [0, 1]$

   (b) $\forall\, x \in [0, 1]$, $f_a^{(n)}(x) = ((a + x)^{-1})^{(n)} = (-1)^n n!(a + x)^{-1-n}$. On a donc $\left|f_a^{(n)}(x)\right| = \frac{n!}{(a+x)^{n+1}} \leqslant \frac{n!}{a^{n+1}}$ donc
   $$\boxed{||f_a^{(n)}||_\infty = \frac{n!}{a^{n+1}}}$$

   (c) la fonction f_a appartient elle à F lorsque $\frac{n!}{a^{n+1}} = o(n!)$ donc lorsque $a > 1$

3. Soient f, g deux fonctions qui appartiennent à F et λ, μ deux scalaires réels. $\forall x \in [0, 1]$,
   $$\begin{array}{rcl}(\lambda f + \mu g)^{(n)}(x) & = & \lambda f^{(n)}(x) + \mu g^{(n)}(x) \\ ||(\lambda f + \mu g)^{(n)}||_\infty & \leqslant & |\lambda|\,||f^{(n)}||_\infty + |\mu|\,||g^{(n)}||_\infty = o(n!)\end{array}$$
   Ainsi F est stable par combinaison linéaire et donc F est un sous espace vectoriel de E.

4. (a) Soit $x \in [0, 1]$.
   Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction f à l'ordre n entre 0 et x
   $$\boxed{\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k\right| \leqslant \frac{(x-0)^{n+1}}{(n+1)!} \sup(\left|f^{(n+1)}(t)\right|, t \in [0, 1])}$$
   Donc $\forall x \in [0, 1]$, $|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \sup(\left|f^{(n+1)}(t)\right|, t \in [0, 1])$, donc
   $$||f - P_n||_\infty \leqslant \frac{||f^{(n+1)}||_\infty}{(n + 1)!}$$

   (b) $\lim(\frac{||f^{(n+1)}||_\infty}{(n+1)!}) = 0$ donc $\lim ||f - P_n||_\infty = 0$. Ainsi $\forall x \in [0, 1]$, $\lim |f(x) - P_n(x)| = 0$

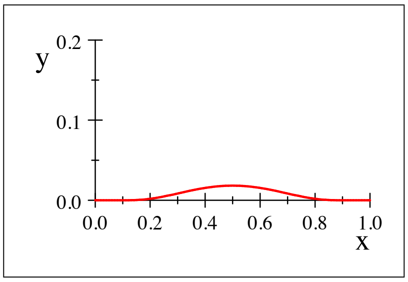
   (c) Pour la fonction f_a lorsque $a > 1$, on a
   $$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k k!}{a^{k+1} k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{a^{k+1}} x^k$$
   Donc
   $$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{a^{k+1}} x^k = f_a(x) = \frac{1}{a + x}$$
   On retrouver ce résultat plus simplement en remarquant que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{a^{k+1}} x^k = \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{+\infty} (\frac{-x}{a})^k = \frac{1}{a} \frac{1}{1+\frac{x}{a}}$ puisque
   $$\left|\frac{-x}{a}\right| = \frac{x}{a} \leq \frac{1}{a} < 1$$

1. (a) Montrons que la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ est axe de symétrie du graphe : pour tout $x \in]0, 1[$

$$f(1-x) = e^{\frac{1}{(1-x)(1-x-1)}} = f(x)$$

d'ou le résultat. On peut aussi prouver que $f(\frac{1}{2} + x) = f(\frac{1}{2} - x)$

(b) pour $x \in]0, 1[$ $f'(x) = \frac{1-2x}{x^2(x-1)^2} f(x)$ f' est donc croissante sur $]0, \frac{1}{2}]$ et décroissante sur $[\frac{1}{2}, 1[$. $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = \lim_{x \to 1} f(x)$



2. (a) f est de classe C^∞ sur $]0, 1[$ comme composée de $x \to x(x-1)$ qui ne s'annule pas sur $]0, 1[$, $x \to \frac{1}{x}$ qui est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$, $x \to \exp(x)$ qui est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrons par récurrence sur l'entier naturel p que la propriété $P(p)$: " il existe un polynôme Q_p tel que $\boxed{f^{(p)}(x) = \frac{Q_p(x)}{(x(x-1))^{2p}} f(x)}$," est vraie pour tout entier p.

$p = 0$: $\forall x \in]0, 1[$, $f^{(0)}(x) = f(x) = \dfrac{f(x)}{(x(x-1))^{2\times 0}} Q_0(x)$ avec $Q_0(x) = 1$.

Supposons la propriété vraie pour un entier $p-1$ donné: $\forall x \in]0, 1[$, $f^{(p-1)}(x) = \frac{Q_{p-1}(x)}{(x(x-1))^{2p-2}} f(x)$: Alors

$$f^{(p)}(x) = (f^{(p-1)})'(x) = \frac{Q'_{p-1}(x)(x(x-1))^{2p-2} - Q_{p-1}(x).(2p-2)(x(x-1))^{2p-3}(2x-1)}{(x(x-1))^{4p-4}} f(x) + \frac{Q_{p-1}(x)}{(x(x-1))^{2p-2}} . \frac{-(2x-1)}{(x(x-1))^2}$$

$$f^{(p+1)}(x) = f(x) \frac{Q'_{p-1}(x)(x(x-1))^2 - (2p-2)Q_{p-1}(x)(2x-1)(x(x-1)) - (2x-1)Q_{p-1}(x)}{(x(x-1))^{2p}}$$

On obtient bien :

$$f^{(p)}(x) = \frac{Q_p(x)}{(x(x-1))^{2p}} f(x)$$

où Q_p est la fonction définie par:

$$\boxed{Q_p(x) = Q'_{p-1}(x) x^2 (x-1)^2 - (2x-1) Q_{p-1}(x) \left((2p-2)x(x-1) + 1\right)}$$

On obtient donc un **polynôme** .

(c) On remarque que

$$\deg(Q_p) \leqslant \max(\deg(Q'_{p-1}) + 4, \deg(Q_{p-1}) + 3) = \deg(Q_{p-1}) + 3$$

et que $deg(Q_0) = 0$. Donc par récurrence évidente $\deg(Q_p) \leqslant 3p$

(d) pour tout entier naturel p,

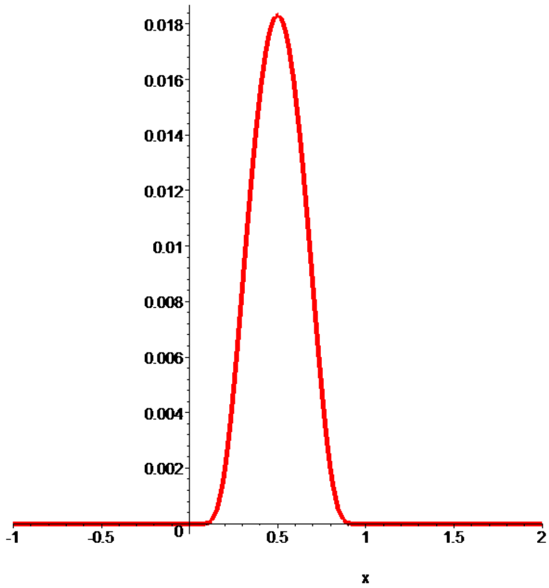
$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} f^{(p)}(x) &= \lim_{x \to 0^+} \frac{Q_p(x)}{(x(x-1))^{2p}} f(x) \\ &= Q_p(0) \times \lim_{x \to 0^+} \frac{\exp(\frac{1}{x(x-1)})}{x(x-1)^{2p}} \\ &= Q_p(0) \lim_{y \to -\infty} y^{2p} \exp(y) = 0 \text{ (on a posé } y = \frac{1}{x(x-1)}) \end{aligned}$$

par croissance comparée

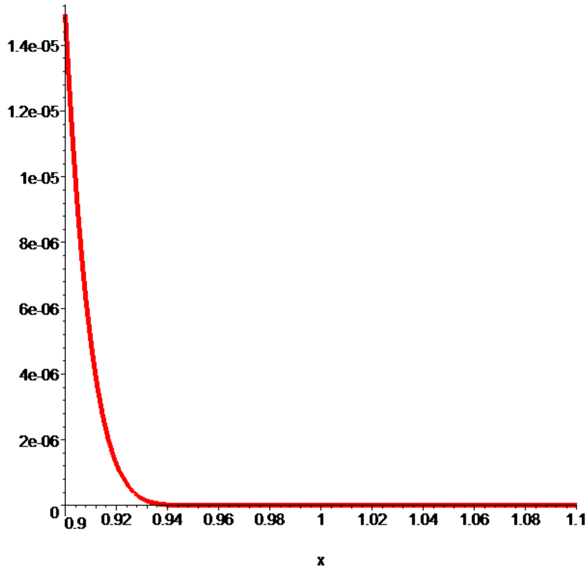
3. On dispose du théorème de prolongement de la dérivée: si f est continue sur $[a,b]$, de classe C^1 sur $]a,b]$ et si f' admet une limite en a^+ alors f et de classe C^1 sur $[a,b]$.
On applique ce théorème à la restriction de f à $[0,1/2]$. f est continue sur $[0,1/2]$ car $\lim_{x\to0^+} f(x) = 0$ et $f(0)=0$, d'autre part f est C^1 sur $]0,1/2]$ et $\lim_{x\to0^+} f'(x) = 0$.
f est continue en 0, et elle est dérivable en 0 puisque

$$\begin{aligned} f(0^-) &= \lim f(x)_{x\to0^-} = 0 \text{ et } f(0^+) = \lim f(x)_{x\to0^+} = 0 \text{ donc } f \text{ est continue en } 0 \text{ et } f(0)=0 \\ f'(0^-) &= \lim f'(x)_{x\to0^-} = 0 \text{ et } f'(0^+) = \lim f'(x)_{x\to0^+} = 0 \text{ donc } f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0)=0 \end{aligned}$$

f est bien de classe C^1 sur $]-\infty,1/2]$. La formule $f(1-x)=f(x)$ permet de dire que f est de classe C^1 sur $[\frac{1}{2},+\infty[$
Ce même théorème et la même démarche s'appliquent successivement à f', f'',..., $f^{(k)}$ ...et on montre ainsi que f est classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que $\boxed{f^{(p)}(0) = 0 = f^{(p)}(1)}$
Rem : La fonction f atteint son maximum en $\frac{1}{2}$ qui vaut e^{-4}, la courbe possède une tangente horizontale en 0 et en 1 et a du mal a décoller car toutes ses dérivées sont nulles.



graphe de f sur $[-2,2]$



zoom sur $[0.9,1.1]$

Devoir surveillé 4 : un corrigé

Exercice 3

1. a. La composée $\ln \circ f$ est définie ssi $f > 0$. Par ailleurs, la convexité de $\ln \circ f$ se traduit par : $\forall \lambda \in [0,1], \forall (a,b) \in I, \ln \circ f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda \ln \circ f(a) + (1-\lambda) \ln \circ f(b) = \ln(f(a)^\lambda f(b)^{1-\lambda})$

On conclut par croissance de la fonction exponentielle.

b. La fonction $\ln \circ \operatorname{ch}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable et $(\ln \circ \operatorname{ch})' = \dfrac{\operatorname{ch}'}{\operatorname{ch}} = \dfrac{\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}} = \operatorname{th}$ qui est croissante. Donc par caractérisation des fonctions convexes dérivables, $\ln \circ \operatorname{ch}$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $\alpha \leq 0$, la fonction $t \mapsto \ln(t^\alpha) = \alpha \ln(t)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction $\ln$ est concave. Comme $\alpha \leq 0$, la fonction $\alpha \ln$ est convexe.

c. Soit f une fonction log-convexe. Alors $\ln \circ f$ est convexe. On sait que la fonction exp est **croissante** et convexe et il est facile de vérifier que la composée d'une fonction convexe avec d'une fonction croissante et convexe est aussi convexe.

Donc f est convexe.

d. Sens direct : soit $C > 0$. $t \mapsto \ln(f(t)C^t) = \ln(f(t)) + t \ln C$ est la somme de deux fonctions convexes, donc convexe.

Sens réciproque : Soient $a < b$ dans I et $\lambda \in [0,1]$. Pour tout $C > 0$,

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) C^{\lambda a + (1-\lambda) b} \leq \lambda f(a) C^a + (1-\lambda) f(b) C^b$$

Alors en divisant par $C^{\lambda a + (1-\lambda)b}$, on obtient

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) C^{a - \lambda a - (1-\lambda)b} + (1-\lambda) f(b) C^{b - \lambda a - (1-\lambda) b} = \lambda f(a) c^\mu + \mu f(b) c^{-\lambda}$$

en notant $\mu = (1-\lambda)$ et $c = C^{a-b}$.

On souhaite majorer le dernier terme par $f(a)^\lambda f(b)^\mu$ ne choisissant judicieusement la valeur de c (donc de C).

En particulier, pour $C = \left(\dfrac{f(b)}{f(a)}\right)^{\frac{1}{a-b}} > 0$, c'est à dire $c = \left(\dfrac{f(b)}{f(a)}\right)$, on obtient :

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) c^\mu + \mu f(b) c^{-\lambda} = f(a)^\lambda f(b)^{1-\lambda}.$$

2. a. Soit $N \in \mathbb{N}$ Par récurrence, $F(N) = N(N-1) \cdots 2 \cdot 1 \cdot F(0) = N!$

b. Par récurrence, $F(n+t) = F(t) \prod_{k=1}^n (t+k)$. ON note $\Pi(t) = \prod_{k=1}^n (t+k)$.

Par convexité de $\ln(F)$, comme $n-1 < n < n+t < n+1$ et par inégalité des pentes ;

$$\frac{\ln(F(n)) - \ln(F(n-1))}{n-(n-1)} \leq \frac{\ln(F(n+t)) - \ln(F(n))}{n+t-n} \leq \frac{\ln(F(n+1)) - \ln(F(n))}{n+1-n}$$

Donc $\ln(\frac{n!}{(n-1)!}) \leq 1/t \ln(\frac{F(n+t)}{n!} \leq \ln(\frac{(n+1)!}{n!}$, donc $y \ln n \leq \ln(F(t)\Pi(t)/n!) \leq t \ln(n+1)$ donc $n^t \leq F(t)\Pi(t)/n! \leq (n+1)^t$.

Finalement, $1 \leq \dfrac{F(t)\Pi(t)}{n! n^t} \leq (1 + 1/n))^t$.

Lorsque n tend vers $+\infty$, les deux gendarmes de l'encadrement tendent vers 1.

Donc $F(t)\Pi(t) \sim_{n \to +\infty} n! n^t$ donc $\dfrac{N! N^t}{(t+1) \cdots (t+N)} \to_{N \to +\infty} F(t)$.

c.

PROBLÈME

Partie A : généralités

1. Par les théorèmes opératoires sur les fonctions de classe C^∞, f et g sont C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et on trouve bien la formule annoncée.

2. Par croissances comparées, g tend vers 0 en 0^+. On prolonge donc par $g(0) = 0$. Alors pour $t > 0$, et encore par croissances comparées, le taux d'accroissement de g en 0 $\dfrac{g(t) - g(0)}{t}$ tend vers 0 lorsque t tend vers 0^+. Donc par définition, g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.

3. Pout $t > 0$, on trouve $g'(t) = \dfrac{e^{-1/t}}{t^3}(1-t)$. On trouve que g est croissance sur $[0, 1]$ et g décroissante sur $[1, +\infty[$.

g atteint un maximum en 1 égal à e^{-1}.

4. **a.** La fonction $t \mapsto t \exp -t = g(1/t)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$. On pose $H(x) = \int_1^x g(t)\mathrm{d}t$. Posons $u(t) = -e^{-t}$ et $v(t) = t$. Les fonctions u et v sont de classe C^1 donc par intégration par parties, $H(x) = -\exp(-x)(x + 1) + 2e^{-1}$.

b. Posons $x = 1+h$. Alors $H(x) = -e^{-1}e^{-h}(2+h)+2e^{-1} = e^{-1}(1-h+h^2/2-h^3/6+o(h^3))(2+h) + 2e^{-1} = e^{-1}(x-1) - \dfrac{e^{-1}}{6}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$.

5. **a.** Soit $t > 0$. On remarque que $(E_n) si et seulement si g(t) = 1/n$. Or, g est continue sur l'intervalle $[0, 1]$, $g(0) = 0 < 1/n$ et $g(1) = e^{-1} > 1/n$ dès que $n \geq 3$.

Par théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un $\alpha_n \in]0, 1[$ tel que $g(\alpha_n) = 1/n$.

De plus, g' est strictement positive sur $]0, 1[$, donc g est strictement croissante sur $[0, 1]$, donc injective.

Donc α_n est unique.

Finalement, il existe un unique $\alpha_n \in]0, 1[$ tel que $f(\alpha_n) = t/n$.

b. La suite (α_n) est définie de manière implicite (comme solution d'une équation). La méthode d'étude de monotonie d'une suite implicite est à connaître : on utilise la monotonie de g et on compare les valeurs de $g(\alpha_n)$ et de $g(\alpha_{n+1})$: ici,

$g(\alpha_{n+1}) = \dfrac{1}{n+1} < 1/n = g(\alpha_n)$. Comme g est croissante, les antécédents α_{n+1} et α_n sont dans le même ordre que leurs image et $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$.

La suite (α_n) est donc décroissante.

Étant minorée par 0, elle converge vers une limite $\ell \geq 0$.

De même, on montrerait que la suite (β_n) est croissante (à faire).

c. Soit $\alpha_n \to \ell \leq 0$. De l'égalité $g(\alpha_n) = 1/n$, par continuité de g et en passant à la limite, on en déduit que $g(\ell) = 0$. Nécessairement $\ell = 0$.

Il en est de même pour (β_n) (à faire).

On en déduit que $\alpha_n \to 0$ et $\beta_n \to +\infty$.

Partie B : Étude d'une courbe paramétrée :

On étudie ici, dans une repère orthonormal d'origine O, la courbe paramétrée définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par le point $M(t)$ de coordonnées $(x(t), y(t)) = (f'(t), g(t))$.

1. Il faut $f'(t) = g(t)$ donc $t = 1$ car $tf'(t) = g(t)$. Réciproquement, $t = 1$ convient.

2. La pente étudiée est $p(t) = \dfrac{x(t)}{y(t)} = t$. Donc $p(t) \to_{0^+} 0$ et $p(t) \to_{+\infty} +\infty$.

3. On trouve notamment $x'(t) = f''(t) = \dfrac{\exp(-1/t)}{t^4}(1-2t)$ qui change de signe en $1/2$.
Trajectoire de la courbe paramétrée à contrôler sur la calculatrice ou l'ordinateur.

Partie C : Fonctions définies par des intégrales

1. Par le théorème du prolongement dérivable :
— f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f(t) \to 0 = f(0)$ en 0^+. Donc f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
— f est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
— $f'(t) = \dfrac{\exp(-1/t)}{t^2}$ tend vers 0 lorsque t tend vers 0^+.
Donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et de plus, $f'(0) = 0$.

2. a. Ces intégrales sont définies comme intégrales de fonctions continues sur le segment $[0, x]$. Par intégration par parties (les fonctions considérées sont de classe C^1) :

$$F(x) = xf(x) - 0f(0) - \int_0^x tf'(t)\mathrm{d}t = xe^{-1/x} - G(x).$$

b. Soit $x \geq 1$. Comme $x \geq 0$ et g positive, par croissance de l'intégrale, on a $G(x) \geq 0$. Soit alors $C = \int_0^1 g$. Alors par la relation de Chasles :

$$G(x) = \int_0^1 g + \int_1^x g \leq C + \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = C + \ln x.$$

c. Alors si $x \geq 1$, $0 \leq G(x)/x \leq C/X + \ln(x)/x$.

Le terme de droite tendant vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ par croissances comparées, alors par théorème des gendarmes, $G(x)/x$ tend vers 0. Donc $G(x) = o_{+\infty}(x)$.

Alors,

$$\frac{F(x)}{x} = \exp(-1/x) + \frac{o(x)}{x} \to_{x\to+\infty} 1 + 0 = 1.$$

Et $F(x) \sim_{+\infty} x$.

3. Les solutions de l'équation homogène sont les $y(x) = C \exp 1/x$ pour $C \in \mathbb{R}$.
Par variation de la constante, on cherche une solution particulière de la forme $y(x) = \lambda(x) \exp(1/x)$, ce qui mène à $\lambda'(x) = \exp(-1/x) = f(x)$.
Alors les solutions de l'équation générale sont les $y : x \mapsto y(x) = (C + F(x)) \cdot \exp(1/x)$

Partie D : Étude qualitative d'une équation différentielle

1. $u_0 = 0$.

2. En dérivant on obtient $x^2y'' + (2x+1)y' = 2x$. En posant $x = 0$, on obtient $u_1 = 0$.
En dérivant à nouveau, $x^2y''' + (4x+1)y'' + 2y' = 2$ et $u_2 = 2$.

3. Non d'après les deux questions qui précèdent...

4. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a. Les solutions de (E) sont nécessairement de classe C^1 et même de classe C^∞ par récurrence et en dérivant l'équation.

Alors en dérivant n fois, $\dfrac{d^n}{dx^n}[x^2y'(x)] + y^{(n)}(x) = 0$ car $n \geq 3$.

Alors, par la formule de Leibniz :

$$\frac{d^n}{dx^n}[x^2y'(x)] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d^k}{dx^k}[x^2](y')^{(n-k)}(x) = x^2y^{(n+1)}(x) + 2nxy^{(n)}(x) + n(n-1)y^{(n-1)}(x).$$

En posant $x = 0$, $\forall n \geq 3, u_n = -n(n-1)u_{n-1}$.

b. Posons pour $n \geq 2$ la propriété : $\mathcal{P}_n$: "$u_n = (-1)^n n((n-1)!)^2$".

$\mathcal{P}_2$ est vraie car $u_2 = 2$.

Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie à un rang $n \geq 2$. Alors $u_{n+1} = -(n+1)nu_n = (-1)^{n+1}(n+1)n^2((n-1)!)^2 = (-1)^{n+1}(n+1)(n!)^2$.

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

La propriété est donc vraie pour tout $n \geq 2$ par récurrence.

Par la formule de Taylor Young, y admet des développemetns limités à tout ordre car y est C^∞, et pour tout $n \in \mathbb{N}$ au voisinage de 0 :

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{k!}x^k + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} (k-1)!x^k + o(x^n).$$

Fin